

3

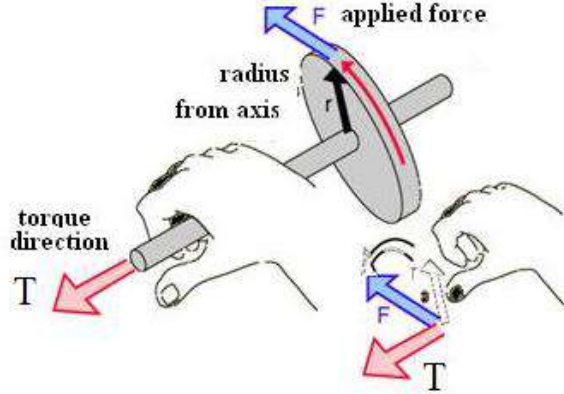
BURULMA

(TORSION)

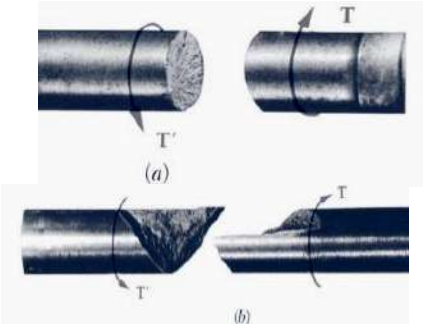
Dairesel Kesitli Çubukların (Millerin) Burulması



Burulma (Torsion): Dairesel Kesitli Millerde Gerilme ve Şekil Değişiklikler



Hasar şekilleri



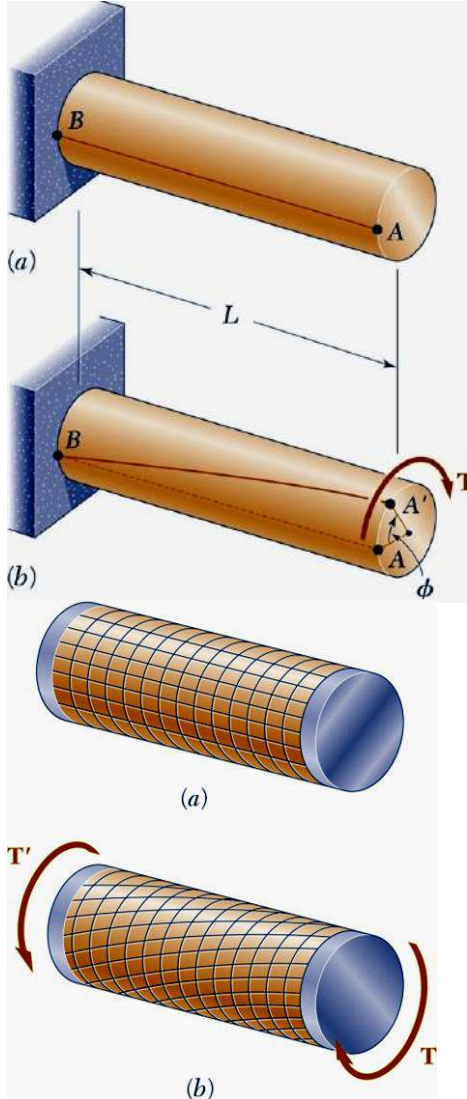
Endüstriyel uygulamalarda en çok rastlanan yükleme tiplerinden birisi dairesel kesitli millere gelen burulma momentleridir.

Burulma momenti vektörü sağ el kaidesine göre çubuk eksenini doğrultusundadır.

Bu konuda ilk amacımız burulma momenti sebebiyle mil kesitinde (dairesel kesitte) oluşan gerilmelerin dağılımını bulmak ve herbir noktadaki değerini hesaplamaktır.



Aslında amaşır sıkmak, teknik anlamda çamaşıra her iki ucundan burulma momenti uygulamak demektir.



3.1 Millerin burulması için yapılan kabuller

Dairesel kesitli çubuk elemanlara mil (ingilizcesi: shaft) denir.

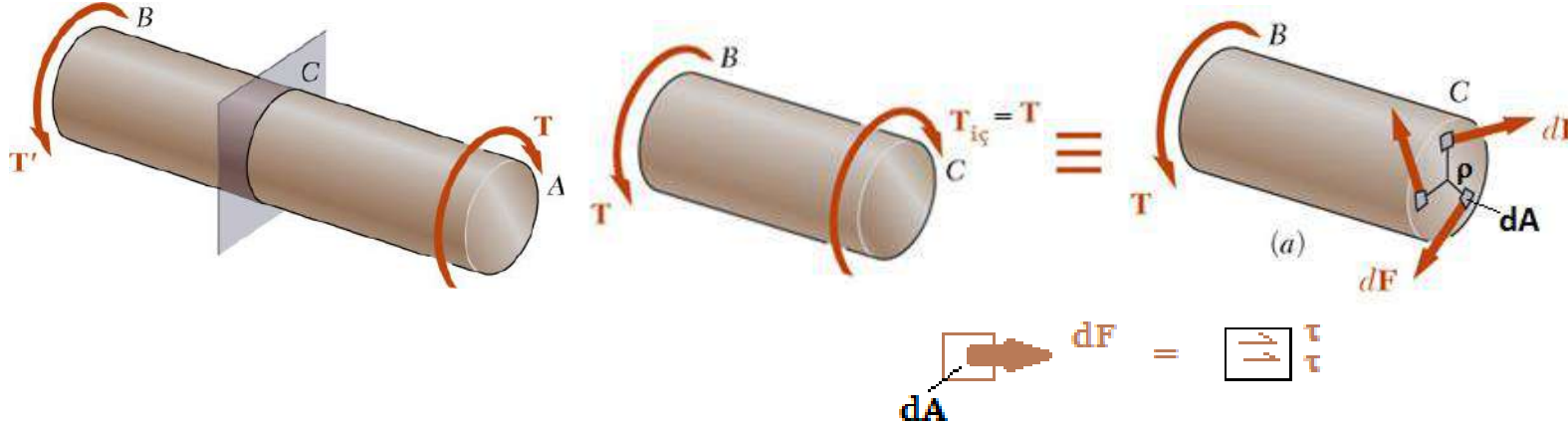
Gözlemlere dayanarak, burulmaya maruz bir milde, elastik sınırlar içerisinde aşağıdaki kabullerin yapılabilir:

- 1- Dönme veya başka ifade ile burulma açısı (ϕ) uygulanan tork değeri ve uzunlukla doğru orantılı olarak değişir.
- 2- Tüm düzlem dairesel kesitler düzlem kalır ve şekli değişmez. Kesitlerde herhangi bir çarpılma olmaz. (Dairesel kesitli olmayan elemanlarda çarpılma oluşur)
- 3- Kesit üzerine çizilen (markalanan) bir çap çizgisi burulma sonrası yine düz kalır.

Bu kabüllerden yola çıkarak, dairese kesitli bir çubuk elemanda elastik yüklemde, burulma sonrası oluşan gerilme dağılımları ve şekil değiştirmeler hesaplanabilir.

(**Dairesel kesitli olmayan parçalarda** bu kabüller yapılamaz. Bu tip elemanlarda burulma sırasındaki gerilme ve şekil değiştirmelerin hesap yaklaşımları ve formülleri tamamen farklıdır. Bu konu ders kapsamımızın dışındadır.)

3.2 Gerilme ve Şekil Değiştirme Hesabı:



Bir mil her iki ucundan elastik sınırlar içinde burulma momentine maruz olsun. Denge halindeki milin hayali bazda ayırdığımız her bir parçası da iç ve dış kuvvetlerin etkisi ile dengededir (ayırma prensibi)

dF : dA diferansiyel elemanına düşen iç kuvvet

$\int \rho dF$: dF kuvvetlerinin merkeze göre momentlerinin toplamı : iç momente eşittir.

$$T_{iç} = T = \int \rho dF = \int \rho(\tau dA)$$

3.2 Gerilme ve Şekil Değişirme Hesabı -devam:

Kayma şekil değişirmesi dönme açısı ve radyüsle orantılıdır

$$AA' \text{ yay uzunluğu} = L\gamma = \rho\phi \rightarrow \gamma = \frac{\rho\phi}{L}$$

(Hooke Bağıntısı) $\tau = G\gamma = G\rho \cdot \frac{\phi}{L}$

$$\rightarrow T = \int \rho\tau dA = \int \rho \cdot G\rho \cdot \frac{\phi}{L} dA = G \cdot \frac{\phi}{L} \int \rho^2 \cdot dA$$

$$\int \rho^2 \cdot dA : J : \text{kesitin polar atalet momenti} \rightarrow T = G \cdot \frac{\phi \cdot J}{L}$$

$$\rightarrow \phi = \frac{T \cdot L}{G \cdot J} \quad (D 3.1) \rightarrow \tau = \frac{G \cdot \rho}{L} \cdot \frac{T \cdot L}{G \cdot J} \rightarrow \tau = \frac{T \rho}{J} \quad (D 3.2)$$

D 3.1 ve D3.2 denklemleri elastik yükleme ve miller için geçerlidir.

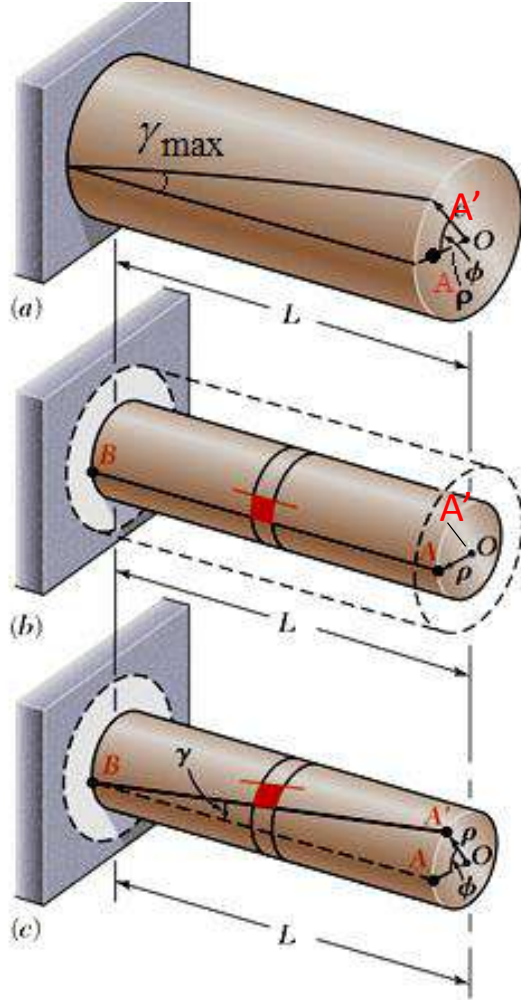
T : burulma momenti (tork) (N.mm)

τ : kayma gerilmesi (N/mm²)

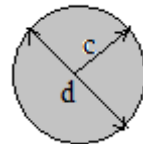
ϕ : burulma (dönme) açısı (radyan)

J : dairesel kesitin polar atalet momenti (mm⁴)

G : Malzeme Rijitlik modülü (MPa)

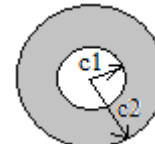


İçi dolu mil



$$J = \frac{1}{2} \pi c^4 = \frac{1}{32} \pi \cdot d^4$$

İçi boş mil



$$J = \frac{1}{2} \pi (c_2^4 - c_1^4) = \frac{1}{32} \pi (d_2^4 - d_1^4)$$

3.3 Dairesel kesitteki kayma gerilmesi dağılımı:

Kesit merkezinden ρ kadar uzak bir noktada kayma gerilmesi D 3.2 denkleminde :

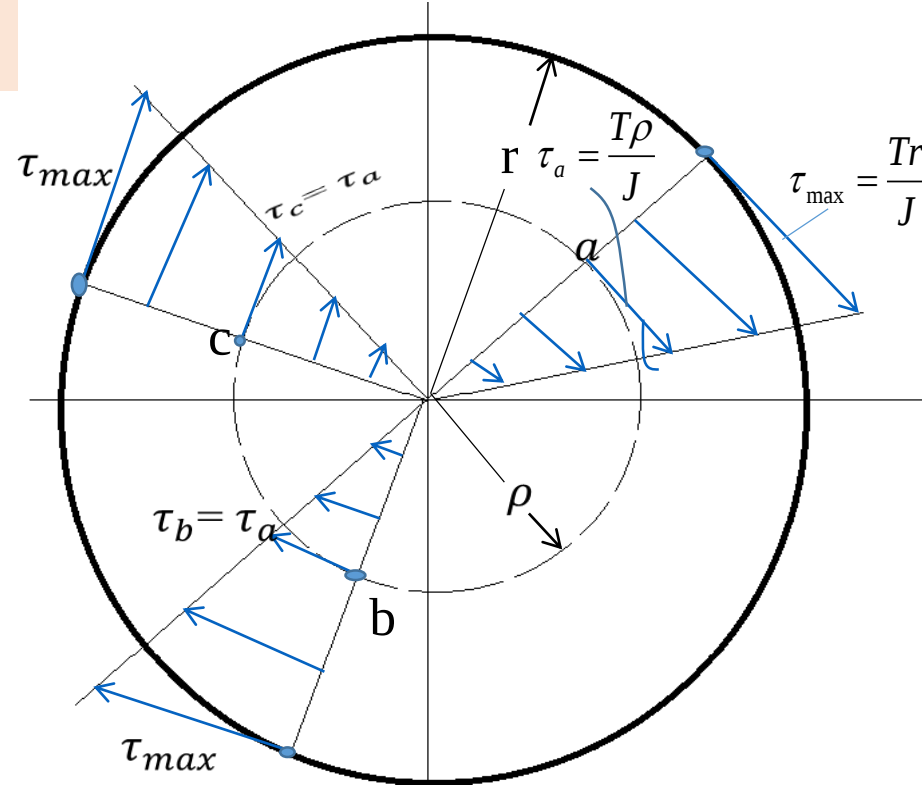
$$\tau = \frac{T\rho}{J}$$

Bir kesitteki T ve J değeri sabittir. Değişen sadece merkezden olan uzaklık (ρ) değeridir.

Buna göre:

- 1- merkezden aynı uzaklıktaki yani aynı çember üzerindeki noktalardaki (örn: a, b, c noktalarındaki) gerilmeler birbirlerine eşittir.
- 2-Dışa doğru gidildikçe ρ artacağı için, gerilmeler de (doğrusal olarak) artar.

3. Maksimum gerilme en dış çemberde ortaya çıkar. Zira dış çemberde $\rho_{\max} = r$ dir.
4. Merkezde ise $\rho=0$ olduğu için gerilme sıfırdır.
4. Kayma gerilmeleri çemberin o noktadaki teğeti doğrultusundadır.



$$\tau_{\max} = \frac{T\rho_{\max}}{J} = \frac{T.c}{J}$$

Bazen r yerine c kullanılabilir.

3.4 Burulmada Şekil Değiştirme:

3.4.1 Elastik Bölgede Burulma Açısı (ϕ)

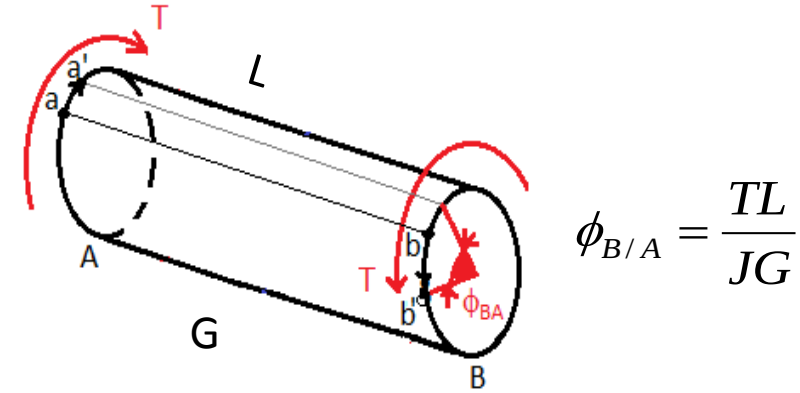
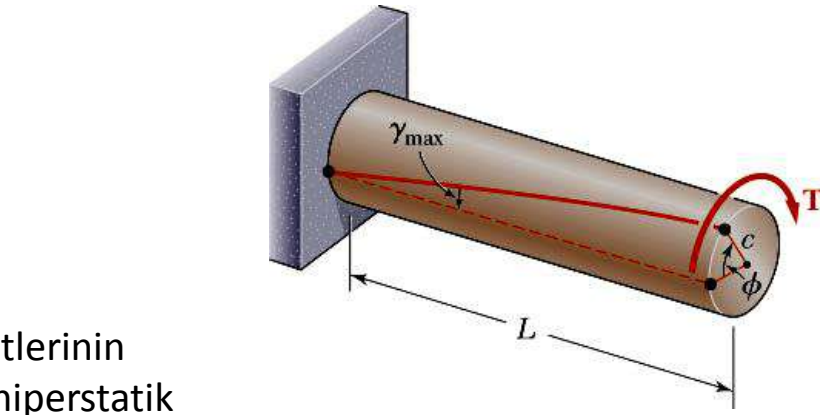
D 3.1 denkleminde

$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

olarak bulmuştuk. Bu açı mil eksenini (x) etrafında mil kesitlerinin birbirlerine göre dönme miktarını verir. Ve burulmadaki hiperstatik problemler için kullanılır.

Bu formül milin öyle bir kısmına uygulanabilir ki; o kısımda

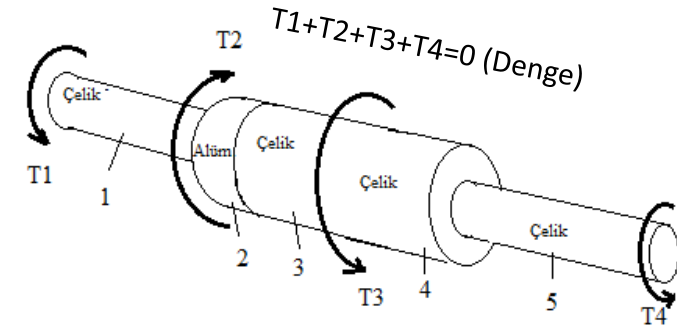
- her iki uç kesitte eşit ve zıt T burulma momenti vardır. Arada başka bir moment yoktur.
- L boyunca malzeme ve kesit geometrisi aynıdır.
- Yandaki şekli inceleyerek ϕ açısını iyice anlamaya çalışınız.



Kademeli millerde Burulma açısı:

- Yukarıdaki şartlardan en az birisi sağlanamıyorsa mil kademelidir ve yine bölgelere ayrılır. Herbir bölgede, L boyunca; T (dış yük), J(kesit) ve G (malzeme) sabit olmalıdır. Bunlardan birisi değişirse bölge değişir.

$$\phi = \sum_i \frac{T_i L_i}{J_i G_i}$$

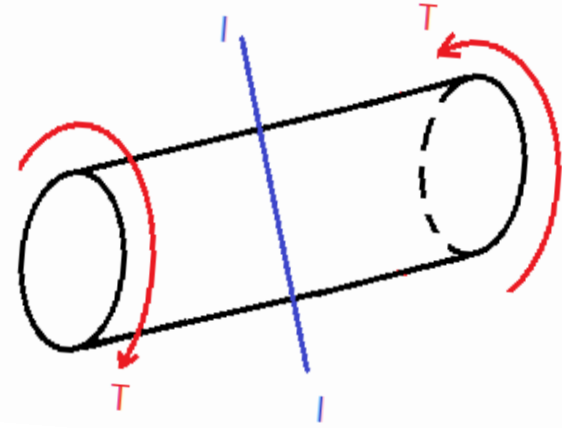


Kademeli mil örneği

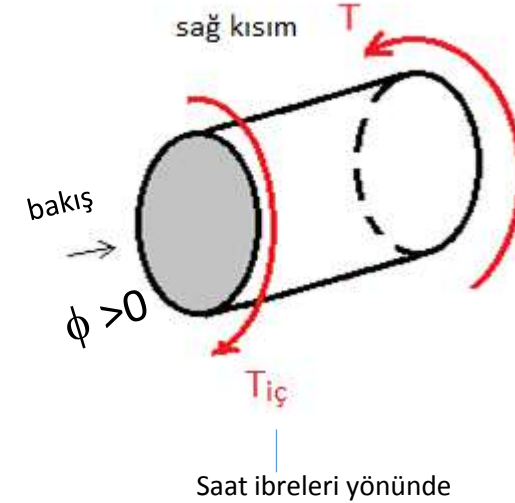
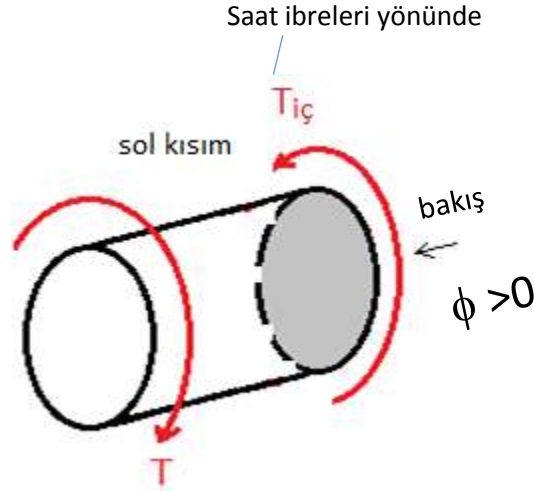
3.4.2 (ϕ) açısının işareti:

İncelediğimiz kesite karşıdan dik olarak baktığımızda kesitteki iç moment ($T_{iç}$) yönü saat ibreleri yönünde ise ϕ açısı pozitif (+) alınır.

Saat ibreleri tersi yönünde ise işareti negatif (-) alınır. Aşağıdaki şekilleri dikkatlice inceleyiniz.

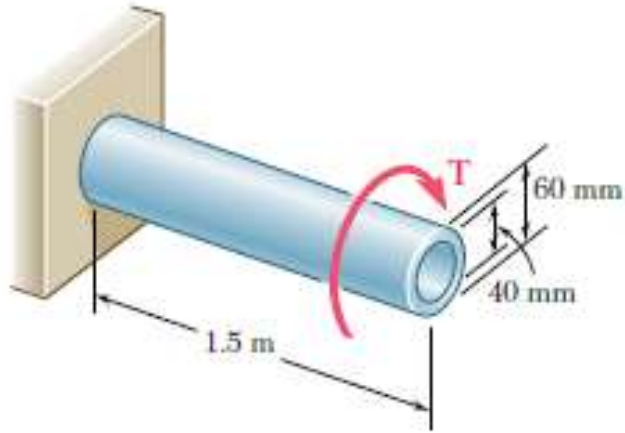


I – I kesimleri



Örnek 3.1:

Şekildeki boru için emniyetli kayma gerilmesi değeri 120 MPa olduğuna göre emniyet sınırları içerisinde uygulanabilecek burulma momentini ve bu momente karşılık gelen minimum kayma gerilmesini bulunuz.



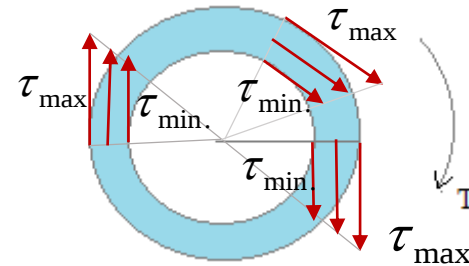
$$\tau_{\max} = \frac{T \cdot c}{J} \quad \longrightarrow \quad T = \frac{J \tau_{\max}}{c} \quad c: \text{yarıçap}$$

İçi boş kesitin polar atalet momenti:

$$J = \frac{1}{2} \pi (c_2^4 - c_1^4) = \frac{1}{2} \pi (30^4 - 20^4) = 1021 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$T = \frac{J \tau_{\max}}{c} = \frac{(1021 \times 10^3 \text{ mm}^4)(120 \text{ MPa})}{30 \text{ mm}} = 4080 \times 10^3 \text{ Nmm} = 4.08 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\tau_{\min} = \frac{T c_{\min}}{J} = \frac{4080 \times 10^3 \text{ Nmm} \times 20 \text{ mm}}{1021 \times 10^3 \text{ mm}^4} = 80 \text{ N/mm}^2 = 80 \text{ MPa}$$



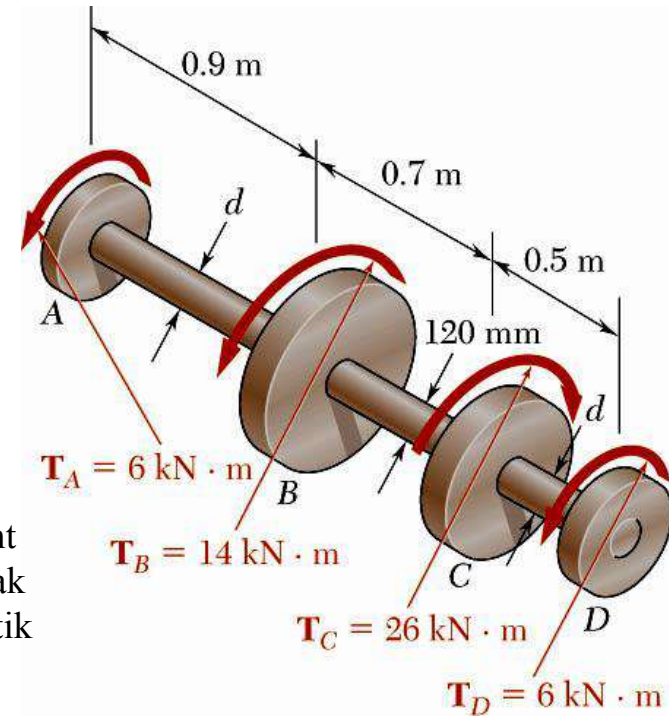
Örnek 3.2:

Şekildeki kademeli milin BC kısmının içi boştur ve iç çapı 90 mm, dış çapı 120 mm'dir. Diğer kısımların içi dolu ve çapları " d " dir.

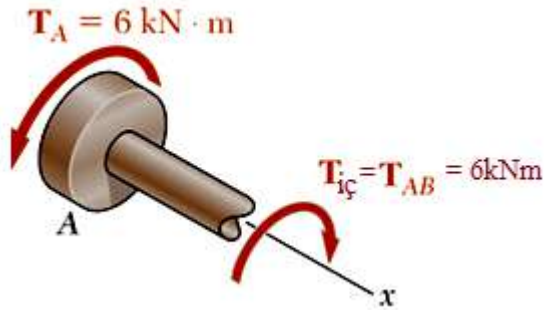
Buna göre;

- AB ve CD kısımları için izin verilebilir (emniyetli) kayma gerilmesi değeri 65 MPa ise « d » minimum ne olmalıdır?
- BC kısımindaki maksimum ve minimum kayma gerilmelerini bulunuz.

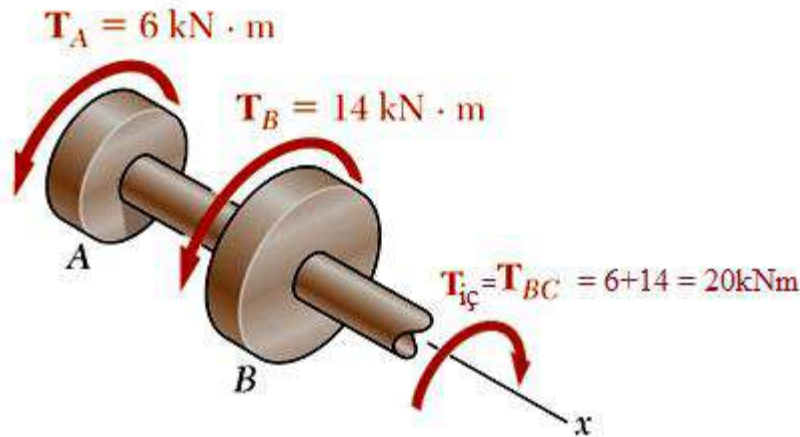
Çözüm: A ucundan başlayıp D ye kadar mili bölgelere ayıracağız. Ani Moment (T) ve mil kesiti değiştiğinde (J) bölge değişir. Buna göre AB, BC ve CD olmak üzere 3 bölge vardır. Şimdi herbir bölgeye ayırma prensibi uygulayacağız, statik dengeden iç momentleri tespit edeceğiz ve bu iç momentleri gerilme formülünde yerine koyacağız.



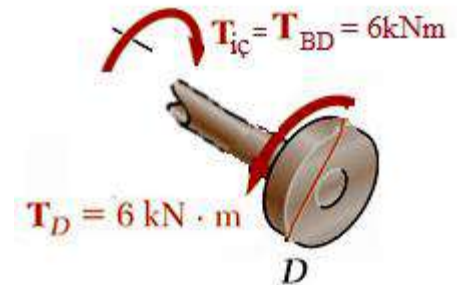
AB bölgesi



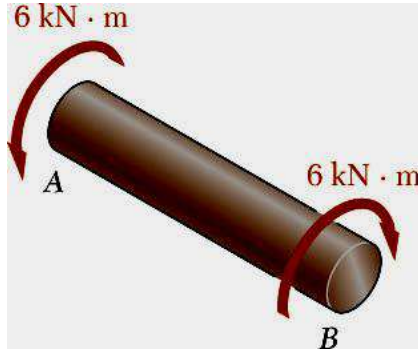
BC bölgesi



CD bölgesi



a)



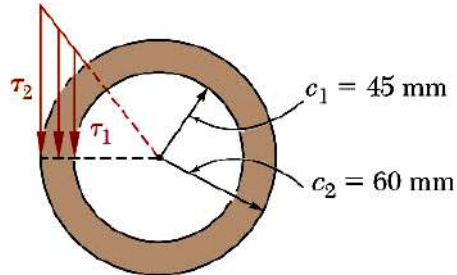
$$\tau_{\max} = \frac{T_{AB} \cdot c}{J} = \frac{T_{AB} \cdot c}{\frac{\pi}{2} c^4} = \tau_{\text{emn.}} \rightarrow \frac{6 \times 10^6 \text{ Nmm}}{\frac{\pi}{2} c^3} = 65 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow c = 38.9 \text{ mm}$$

$$d = 2c = 77.8 \text{ mm}$$

* CD kısmı içinde, iç moment değeri aynı olduğundan aynı sonuç bulunur.

b)



$$J = \frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2} [(60 \text{ mm})^4 - (45 \text{ mm})^4] = 1392 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

$$\tau_{\max} = \tau_2 = \frac{T_{BC} c_2}{J} = \frac{(20 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm})(60 \text{ mm})}{1392 \times 10^4 \text{ mm}^4} = 86.2 \text{ MPa}$$

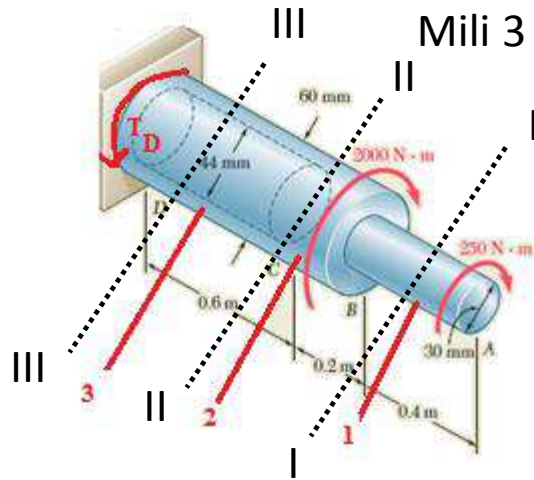
$$\tau_{\min} = \tau_1 = \frac{T_{BC} c_1}{J} = \frac{(20 \times 10^6)(45)}{1392 \times 10^4} = 64.7 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = 86.2 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\min} = 64.7 \text{ MPa}$$

Örnek 3.3: Şekildeki çelik kademeli milin kayma modülü $G=77 \text{ GPa}$ olduğuna göre A ucunun toplam dönme (burulma) açısını bulunuz.

Çözüm: Statik dengeden ankastre uçtaki tepki momenti $T_D = 2250 \text{ kNm}$ çıkar. Ancak kesimlerde sağ kısmı alırsak bunu bulmamıza gerek yoktur.



Mili 3 bölgeye ayırabiliriz. DC, CB, BA bölgeleri

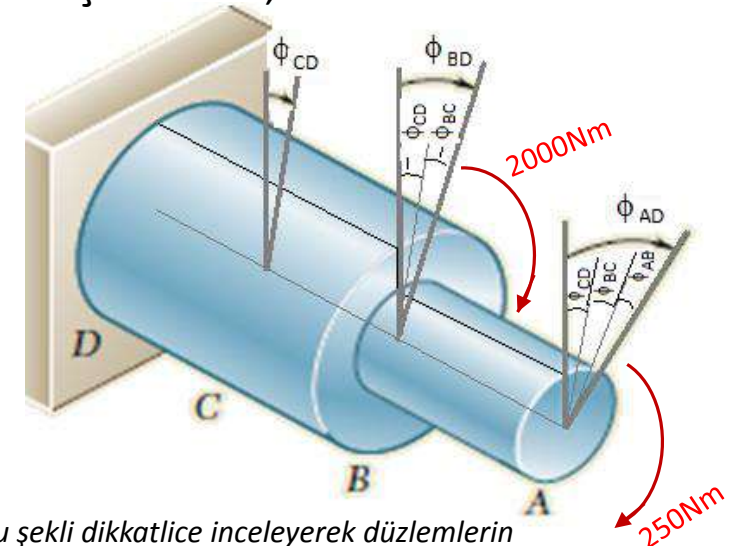
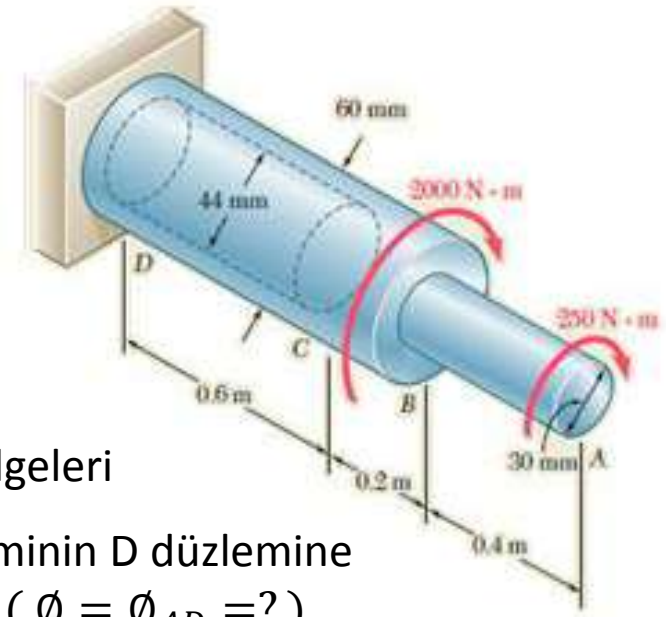
Aslında bizden sorulan A düzleminin D düzlemine göre dönme (burulma) açısıdır. ($\phi = \phi_{AD} = ?$)
Bu ise D den A ya kadar olan bölgelerin birbirlerine göre dönmelerinin toplamına eşittir. Yani;

$$\phi_{AD} = \phi_{CD} + \phi_{BC} + \phi_{CA}$$

C nin D'ye göre dönme açısı

Şunu farkettiler mi?

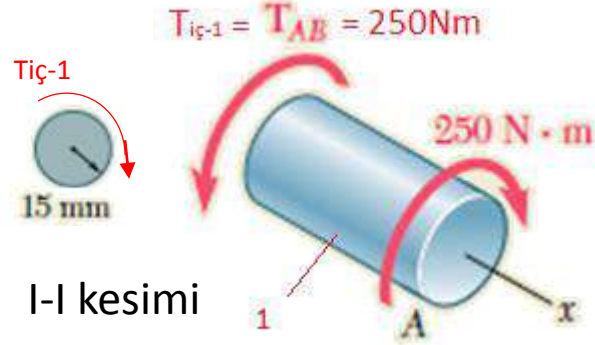
Aslında A düzlemi $\phi_{CD} + \phi_{BC}$ kadar ötelenir, 250Nm lik burulma momenti etkisiyle ϕ_{AB} kadar şekil değiştirir. Bu durumda toplam dönmesi (ϕ_{AD}) bu üç açının toplamı kadar olur.



Bu şekli dikkatlice inceleyerek düzlemlerin birbirlerine göre dönme açılarını anlamaya çalışın.

Şimdi bölgeleri sırayla inceleyip ayırma prensibine göre iç momentleri bulacağız. Unutmayın, ϕ formülünde T değeri bölgenin kesiminden elde ettiğimiz iç moment değeridir.

1.Bölge: AB kısmı



$$L_1 = 400 \text{ mm}$$

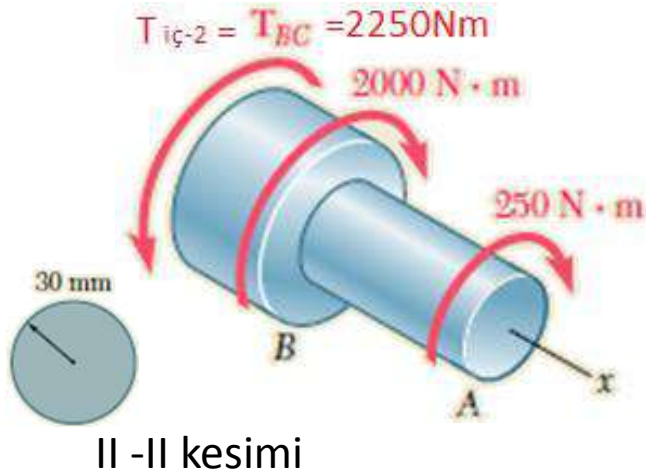
$$J_1 = J_{AB} = \frac{\pi}{2} c_1^4 = \frac{\pi}{2} 15^4 = 795000 \text{ mm}^4$$

$$\phi_{AB} = + \frac{T_{i\check{c}-1} \cdot L_1}{G \cdot J_1} = \frac{T_{AB} \cdot L_1}{G \cdot J_1} = \frac{250 \times 10^3 \text{ Nmm} \cdot 400 \text{ mm}}{77000 \text{ MPa} \cdot 795000 \text{ mm}^4} = 0.01634 \text{ rad}$$

I-I kesitine dik ve karşıdan bakıldığında $T_{i\check{c}-1}$ saat ibreleri yönünde olduğundan ϕ pozitifdir.

2.Bölge: CB kısmı

$$\text{Statik denge şartı : } \sum M_x = 0 \rightarrow T_{BC} - 2000 - 250 = 0 \rightarrow T_{BC} = 2250 \text{ Nm}$$

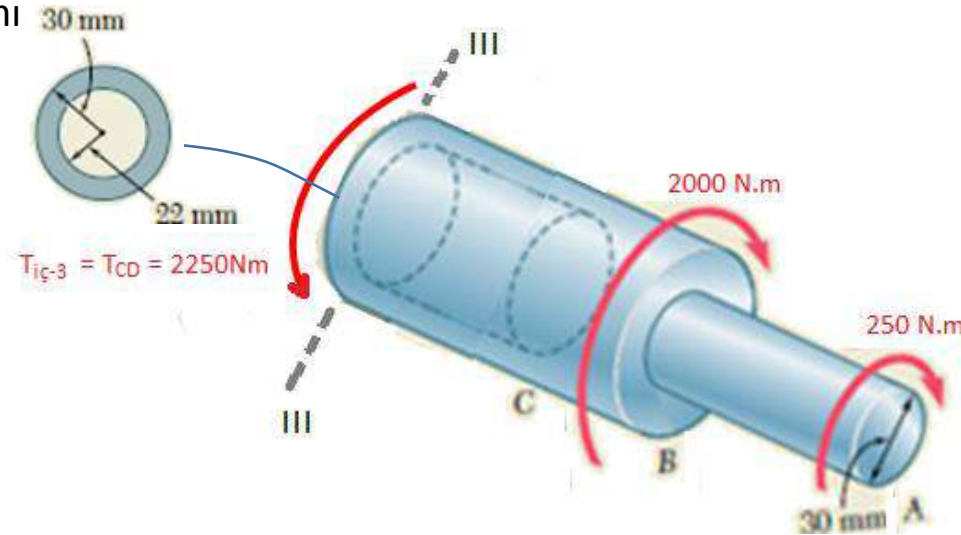


$$L_2 = 200 \text{ mm ,}$$

$$J_2 = J_{BC} = \frac{\pi}{2} c_2^4 = \frac{\pi}{2} 30^4 = 1272000 \text{ mm}^4$$

$$\phi_{BC} = + \frac{T_{i\check{c}-2} \cdot L_2}{G \cdot J_2} = \frac{T_{BC} \cdot L_2}{G \cdot J_2} = \frac{2250 \times 10^3 \text{ Nmm} \cdot 200 \text{ mm}}{77000 \text{ MPa} \cdot 1272000 \text{ mm}^4} = 0.00450 \text{ rad}$$

3.Bölge: CD kısmı



$$L_3 = 600 \text{ mm}$$

$$J_3 = J_{CD} = \frac{\pi}{2} (c_2^4 - c_1^4) = \frac{\pi}{2} (30^4 - 22^4) = 904000 \text{ mm}^4$$

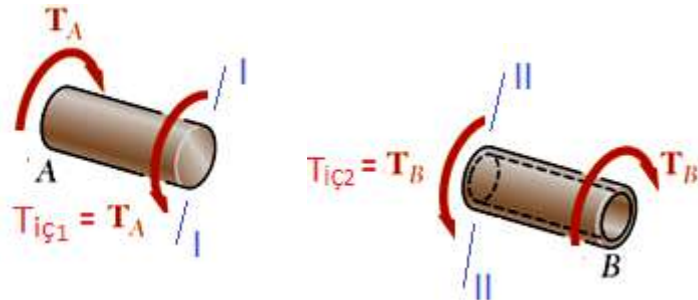
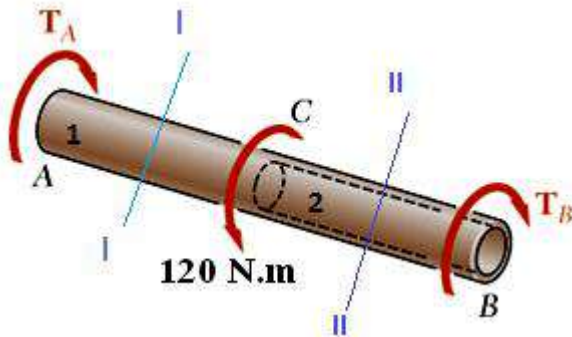
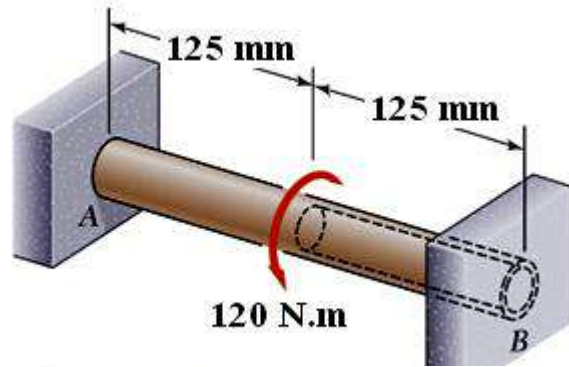
$$\phi_{CD} = + \frac{T_{i\zeta-1} \cdot L_1}{G \cdot J_1} = \frac{T_{AB} \cdot L_1}{G \cdot J_1} = \frac{250 \times 10^3 \text{ Nmm} \cdot 600 \text{ mm}}{77000 \text{ MPa} \cdot 904000 \text{ mm}^4} = 0.01939 \text{ rad}$$

$$\phi_{AD} = \sum \frac{T_i \cdot L_i}{G_i \cdot J_i} = \phi_{CD} + \phi_{BC} + \phi_{CA} = 0.01634 + 0.00450 + 0.01939 = 0.0403 \text{ rad}$$

$$\phi_{AD} = 0.0403 \times \frac{180}{\pi} = 2.31^\circ$$

3.5 Burulmada hiperstatik mil problemleri: Bilinmeyen tepkileri bulmak için statik denklem sayısının yeterli olmadığı burulma problemlerine denir. Önceden bilinen burulma açısından ek denklemler elde edilerek bilinmeyen tepkiler bulunabilir. Bu konuyu örneklerle anlamaya çalışacağız.

Örnek 3.4:



Şekildeki milin (yarısının içi boş) dış çapı 22 mm ve içi boş kısmın iç çapı ise 12 mm dir. Mil A ve B noktalarından sabitlenmiştir. Milin tam ortasına 120 N.m lik bir tork uygulandığında A ve B noktalarında meydana gelen reaksiyon momentlerini bulunuz?

Çözüm:

$$\text{Statik dengeden: } T_A + T_B = 120 \text{ N} \cdot \text{m} \quad (1)$$

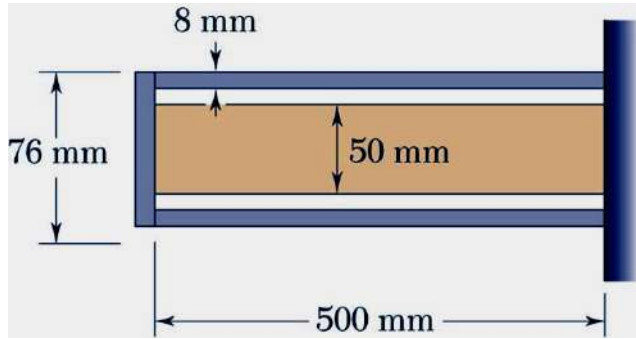
B ve A ankastre olduğu için, bu kısımlarda dönme olmaz. Dolayısıyla toplam dönme açısı (B nin A ya göre burulma açısı) sıfırdır. Mili iki bölgeye ayırırız.

$$\phi = \phi_{B/A} = \phi_{C/A} + \phi_{B/C}$$

$$-\frac{T_A L_1}{GJ_1} + \frac{T_B L_2}{GJ_2} = 0 \rightarrow L_1 = L_2 = 125 \text{ mm} \rightarrow T_B = \frac{J_2}{J_1} T_A$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\pi \cdot (c_2^4 - c_1^4)}{2} T_A = \frac{11^4 - 6^4}{11^4} T_A \rightarrow T_B = 0.91 T_A \quad (2) \end{aligned}$$

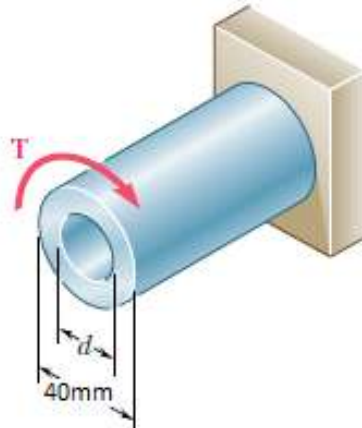
$$(1) \text{ ve } (2) \text{ den } T_A = 62.82 \text{ N} \cdot \text{m} , T_B = 57.18 \text{ N} \cdot \text{m}$$



Örnek 3.5*

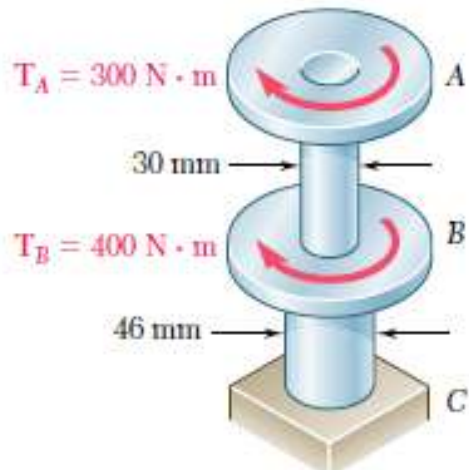
Sağ taraftan sabitlenmiş çelik bir mil ile alüminyum bir tüp, şekildeki gibi rijit bir diske bağlanmıştır. Çelik mil ve alüminyum tüp için emniyetli kayma gerilmeleri sırasıyla 120 MPa ve 70 MPa olduğuna göre; disk vasıtasıyla sisteme uygulanabilecek maksimum tork değerini bulunuz.

($G_{\text{Alüm.}} = 27 \text{ GPa}$, $G_{\text{Çelik}} = 77 \text{ GPa}$)



Örnek (Soru) 3.6

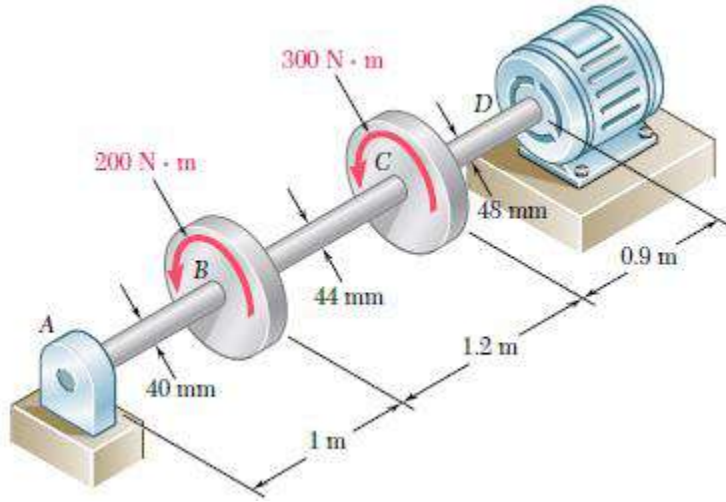
Şekildeki ankastre boruya emniyet sınırları içinde uygulanabilecek maksimum burulma momenti (T) değerini hesaplayınız. ($d = 30 \text{ mm}$, $\tau_{\text{emn.}} = 52 \text{ MPa}$) (Cevap: $T = 446.7 \text{ Nm}$)



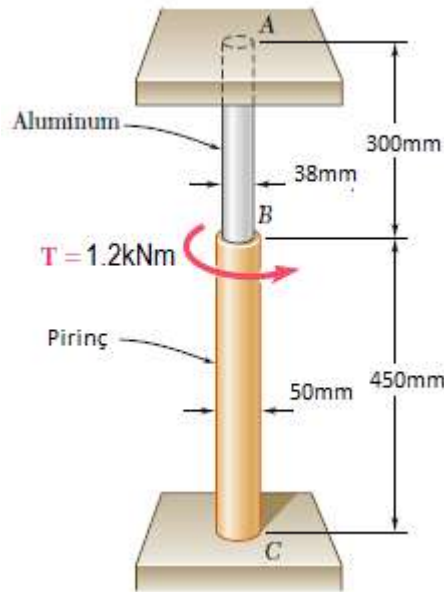
Örnek (Soru) 3.7

Şekildeki kademeli milde, AB ve BC kısımlarında oluşan maksimum gerilmeleri hesaplayınız.

(Cevap: 56.6 MPa, 36.6 MPa)

Örnek (Soru) 3.8

Şekildeki elektrik motorundan alınan, 500Nm lik tork B ve C dişlileri tarafından 200Nm ve 300Nm olarak iletilmektedir. A yatağı dönmeye izin vermektedir. Bu durumda A ucunun D ye göre dönme miktarını (burulma açısını) hesaplayınız.
Cevap: 3.22°

**Örnek (Soru) 3.9**

Alüminyum ve pirinç kısımlarından oluşan, her iki ucu sabit duvara bağlı olan kademeli mile $T = 1.2\text{kNm}$ lik bir tork uygulanıyor. Bu durumda sistemin emniyet kontrolünü yapınız. Verilenler: Emniyet faktörü $n=2$, $G_{\text{alüm.}}=26\text{GPa}$, $G_{\text{pirinç.}}=39\text{GPa}$, $\tau_{\text{akma-alüm.}}=120\text{MPa}$, $\tau_{\text{akma-pirinç.}}=160\text{MPa}$,

Cevap: $\tau_{\text{max-alüm}} = 27.9 \text{ MPa}$ (emniyetli);
 $\tau_{\text{max-pirinç}} = 36.7 \text{ MPa}$ (emniyetli).