

Burulma (Torsion)

Amaçlar

- Bu bölümde şaftlara etkiyen burulma kuvvetlerinin etkisi incelenecek. Analiz dairesel kesitli şaftlar için yapılacak.
- Eleman en kesitinde oluşan gerilme dağılımı ve elemanda oluşan burulma açısı konuları incelenecek.
- Statikçe belirsiz şaft ve tüplerin analizi yapılacak.



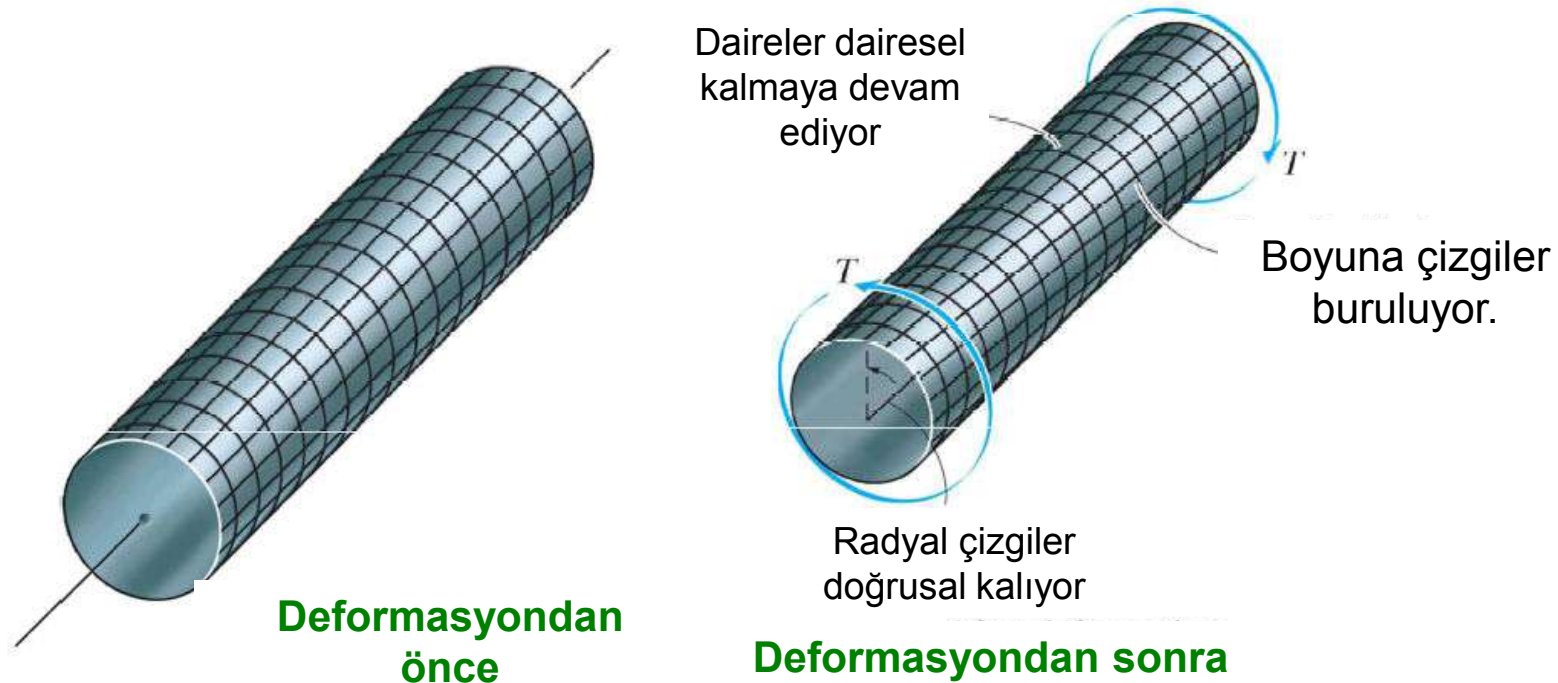
Figure: 05-01-COC

The torsional stress and angle of twist of this soil auger depend upon the output of the machine turning the bit as well as the resistance of the soil in contact with the shaft.

Burulma

Dairesel Kesitli Şaftların Burulma Deformasyonu

- Tork veya burulma, elemanı uzun eksen boyunca burmaya çalışan momenttir. Burulma momenti (tork) araç şaftlarının veya akslarının tasarımında en önemli etkiyi oluşturur.
- Fiziksel olarak burulmanın etkisini açıklamak için aşağıda yumuşak bir malzemeden yapılmış dairesel kesitli elemanı ele alalım:



Burulma

Dairesel Kesitli Şaftların Burulma Deformasyonu



Figure: 05-01-UN-A

Notice the deformation of the rectangular element when this rubber bar is subjected to a torque.

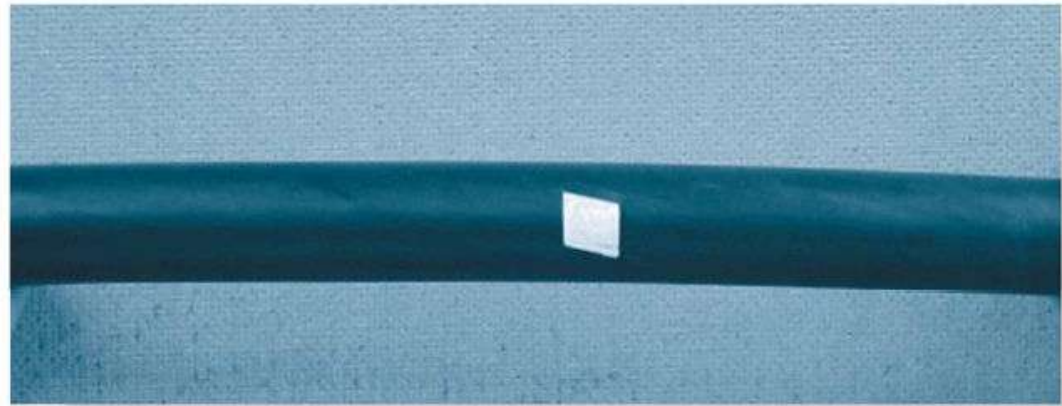


Figure: 05-01-UN-B

Notice the deformation of the rectangular element when this rubber bar is subjected to a torque.

Burulma

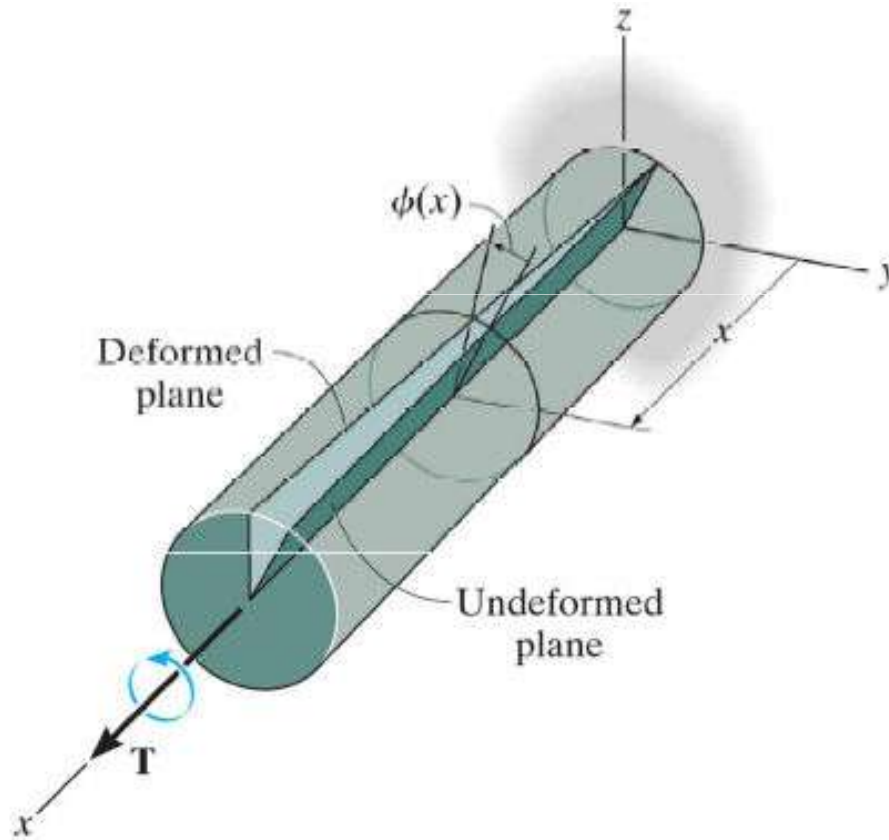
Dairesel Kesitli Şaftların Burulma Deformasyonu

- Burulma momentinin etkidiği noktada herhangi bir lokal deformasyon oluşmadığı yani düzlemsel olarak kaldığı kabul edilmiştir.
- Bu gözlemlerden şunu çıkarmak mümkündür: eğer dönme açısı küçükse, şaftın boyunun ve çapının değişmediği kabul edilebilir.

Burulma

Dairesel Kesitli Şaftların Burulma Deformasyonu

- Eğer şaft bir ucundan mesnetlenmişse, diğer ucuna etkiyen tork (burulma) koyu gri ile gösterilmiş düzlemi şeklindeki gibi deforme olur:



The angle of twist $\phi(x)$ increases as x increases.

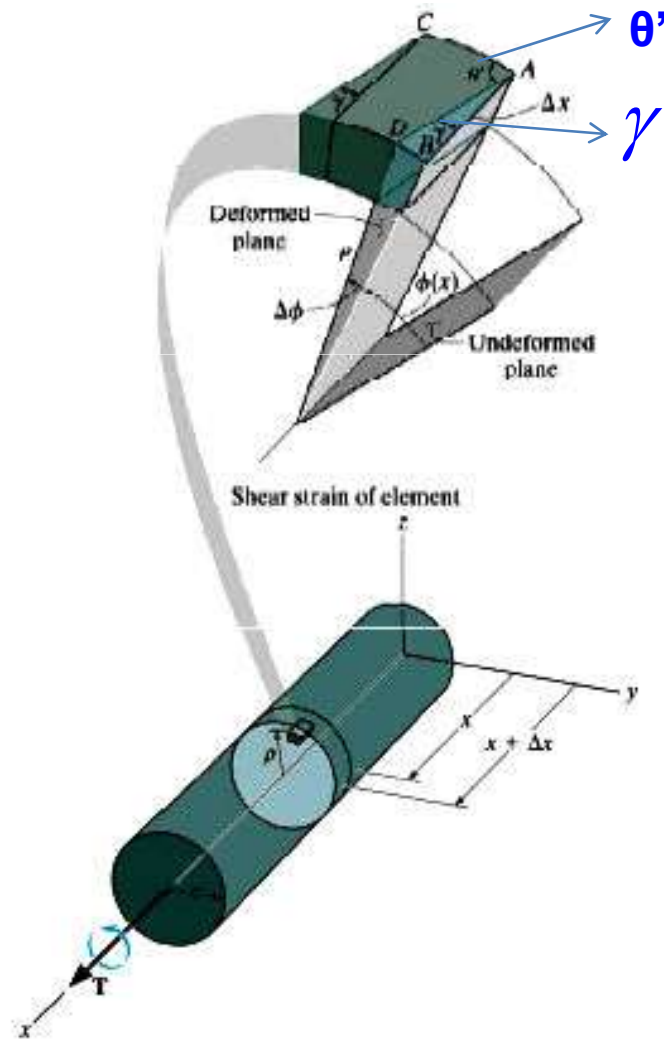
- Dikkat edilirse, mesnetli uçtan x mesafesinde olan kesit üzerindeki radyal çizgi $\phi(x)$ kadar dönmüştür.

- $\phi(x)$ açısına burulma açısı denir ve x mesafesine bağlıdır.

Burulma

Dairesel Kesitli Şaftların Burulma Deformasyonu

➤ Bu şekil değiştirmenin malzemeyi nasıl deforme ettiğini anlamak için, **T** burulma momenti etkileyen elemanın merkezinden ρ (rho) mesafesinde küçük bir elemanı çıkartalım:



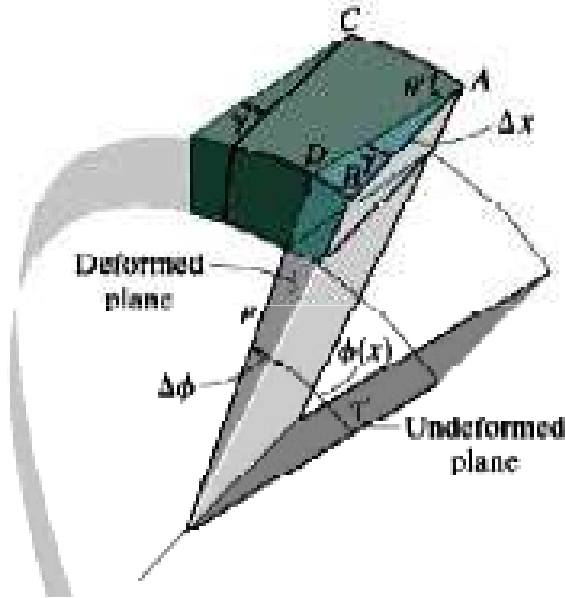
- Arka yüz $\phi(x)$ kadar, ön yüz ise $\phi(x) + \Delta\phi$ kadar dönmüştür,
- Aradaki fark $\Delta\phi$, elemanı kesme şekil değiştirmesine maruz bırakmaktadır,
- Bu şekil değişimini hesaplamak için AB AC kenarları arasındaki açı değişimini dikkate almak gerekir. Başlangıçta aralarındaki açı 90° iken sonrasında aralarındaki açı θ' olmuştur:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \lim_{\substack{C \rightarrow A \\ B \rightarrow A}} \theta'$$

Burulma

Dairesel Kesitli Şaftların Burulma Deformasyonu

- γ (gama) açısı elemanın Δx boyu ve $\Delta\phi$ ile ilişkilendirilebilir. $\Delta x \rightarrow dx$ ve $\Delta\phi \rightarrow d\phi$ yapılırsa:



$$BD = \rho d\phi = dx\gamma$$

Bu durumda

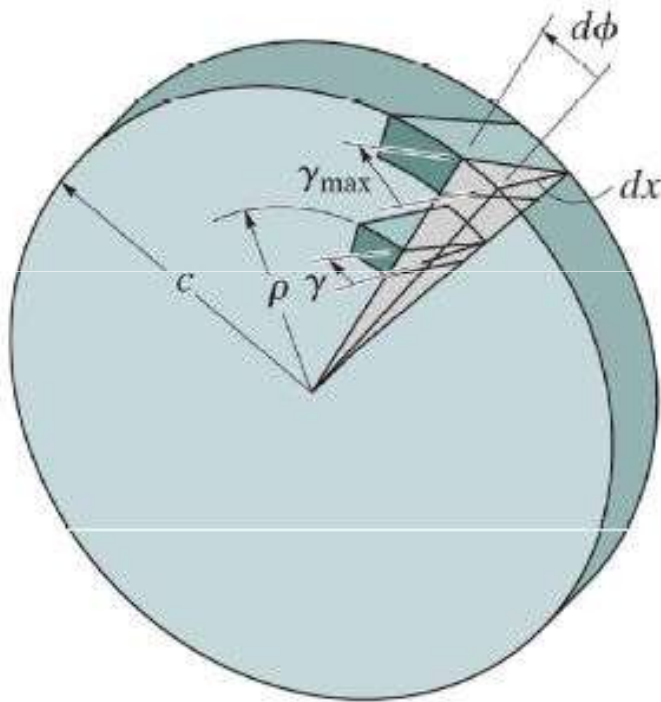
$$\gamma = \rho \frac{d\phi}{dx}$$

Yukarıdaki ifadedeki oran, kırmızı font, eleman üzerindeki her bir nokta için aynı olduğuna göre sabittir diyebiliriz. Bu durumda, kesme şekil değiştirmesi radyal uzaklık ρ ile orantılıdır. Bir başka deyişle, kesme şekil değiştirmesi, radyal hat doğrultusunda lineer bir şekilde değişmektedir.

Burulma

Dairesel Kesitli Şaftların Burulma Deformasyonu

➤ Bu durumda aşağıdaki ifade yazılabilir:



The shear strain at points on the cross section increases linearly with ρ , i.e., $\gamma = (\rho/c)\gamma_{\max}$.

$$\frac{d\phi}{dx} : \text{sabit}$$

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\gamma}{\rho} = \frac{\gamma_{\max}}{c}$$

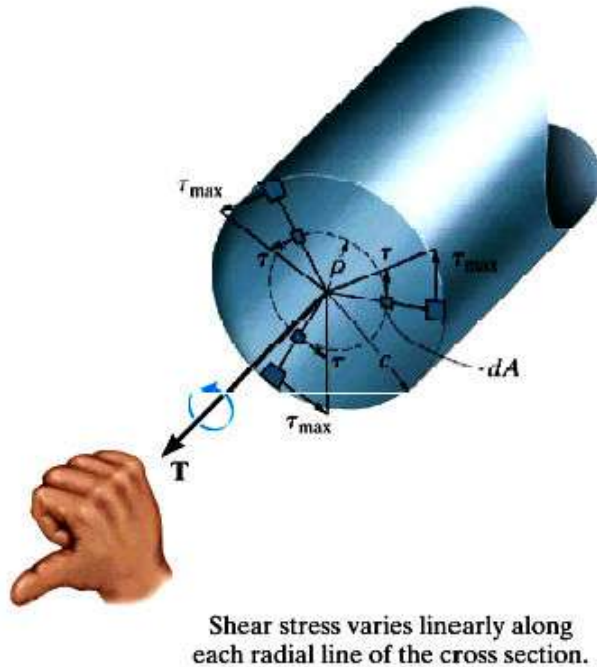
$$\gamma = \left(\frac{\rho}{c} \right) \gamma_{\max}$$

Bu sonuç içi boş dairesel tüpler için de geçerlidir.

Burulma

Burulma Formülü

- Dairesel kesitli bir elemana burulma momenti etkidiğinde, şaftın kesitinde iç kuvvet olarak burulma reaksiyonları oluşur.
- Bu kısımda, iç reaksiyon burulma momenti ile kesme gerilmeleri arasında bir ilişki geliştireceğiz.
- Bir önceki bölümde gördüğümüz gibi, kesitte oluşan lineer kesme şekil değişimleri, kesitte lineer kesme gerilmeleri oluşturacaktır.



Malzemenin burulma etkisi altında lineer kaldığı kabul edilirse, Hooke yasası geçerli olur:

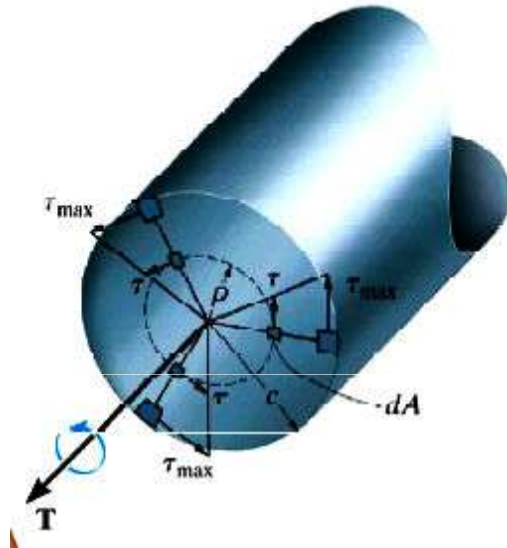
$$\tau = G\gamma$$

Şekilde gösterildiği gibi, dolu dairesel kesitli bir şaftta, gerilmeler sıfırdan başlar ve şaft çeperinde maksimum değere ulaşır.

Burulma

Burulma Formülü

- Benzer üçgenlerden veya Hooke yasası kullanılarak aşağıdaki ilişki yazılabilir:



$$\tau = \left(\frac{\rho}{c} \right) \tau_{\max}$$

Bu denklem, kesitteki kesme gerilmelerinin ρ 'ya bağlı olduğunu göstermektedir.

- Denge şartından dolayı, kesitten oluşan iç burulma momenti, shafta etkiyen dış burulma momentine eşit olmak zorundadır. $dF = (\tau)dA$ olarak yazılabilir. Bu kuvvetin oluşturduğu tork ise $dT = \rho(\tau dA)$ olarak bulunur. Bu değeri integre edersek:

$$T = \int_A \rho(\tau dA) = \int_A \rho \left(\frac{\rho}{c} \right) \tau_{\max} dA = \frac{\tau_{\max}}{c} \int_A \rho^2 dA$$

Burulma

Burulma Formülü

$$T = \frac{\tau_{\max}}{c} \int_A \rho^2 dA$$

➤ Yukarıdaki integral kesitin sadece geometrisi ile ilişkilidir ve kesitin boyuna eksenini doğrultusundaki polar atalet momenti olarak bilinir ve **J** ile gösterilir. Bu durumda, bu denklem aşağıdaki gibi tekrar yazılabilir:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{J} c$$

Kesitte oluşan maksimum kesme gerilmesi

Kesitteki burulma reaksiyon kuvveti

Kesitin dış yarıçapı

Burulma

Burulma Formülü

➤ Aşağıda verilen iki denklemi kullanarak, kesitte aradaki bir noktada oluşan kesme gerilmelerini bulabilir:

$$\tau = \left(\frac{\rho}{c} \right) \tau_{\max} \qquad \tau_{\max} = \frac{T}{J} c$$

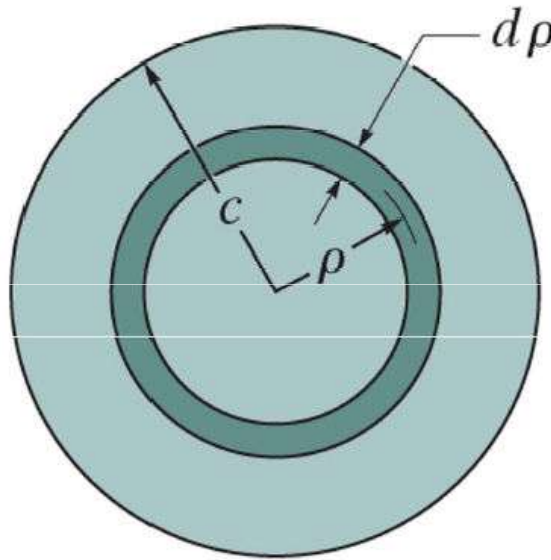
$$\tau = \frac{T}{J} \rho$$

Bu formül, burulma formülü olarak bilinir ve şaft dairesel ve malzeme homojen ve lineer elastik davranıyorsa kullanılabilir.

Burulma

Polar Atalet Momenti (İçi Dolu Dairesel Kesit)

- İçi dolu dairesel bir kesitin polar atalet momenti aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

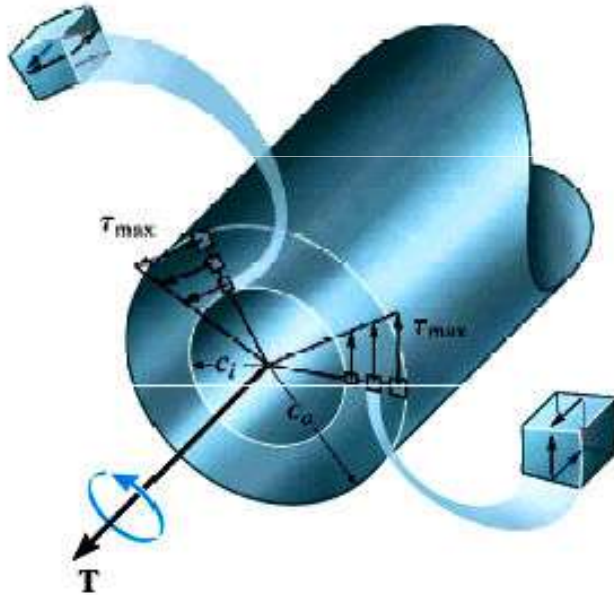


$$J = \int_A \rho^2 dA = \int_0^c \rho^2 (2\pi\rho d\rho) = 2\pi \int_0^c \rho^3 d\rho = \frac{\pi}{2} c^4$$

Burulma

Polar Atalet Momenti (Tüp Şeklinde Dairesel Kesit)

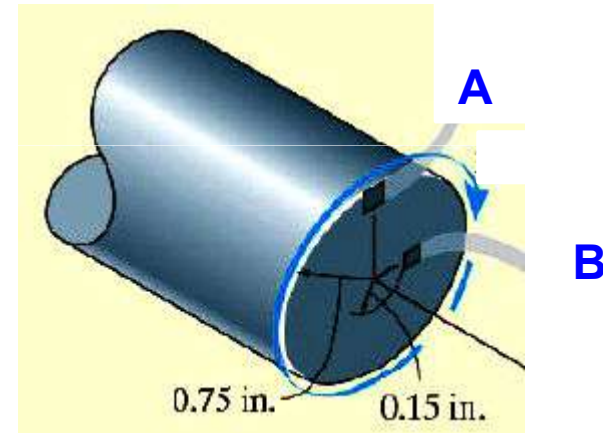
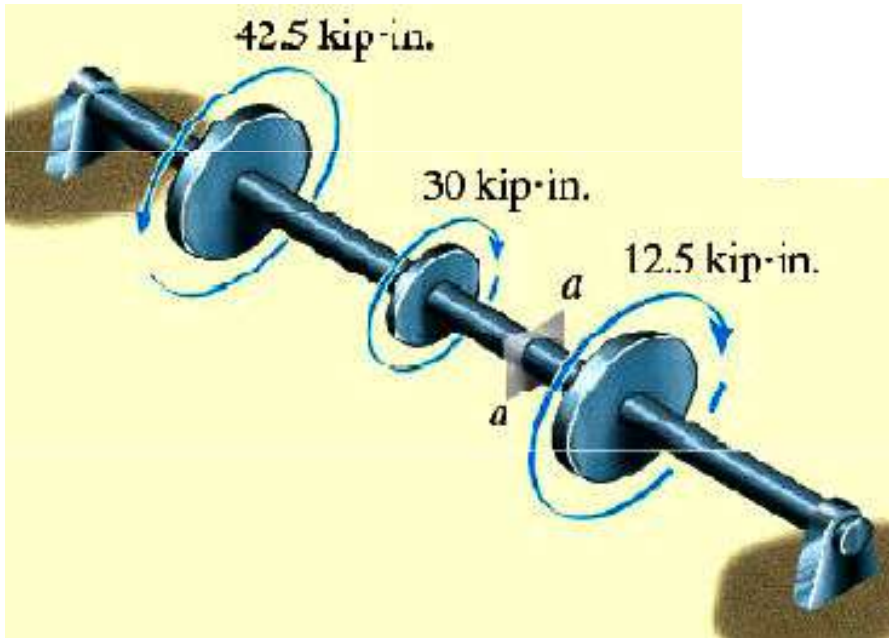
- İçi belli bir çapta boşaltılmış dairesel kesitin polar atalet momenti ise aşağıdaki gibi hesaplanabilir:



$$J = \frac{\pi}{2} (c_o^4 - c_i^4)$$

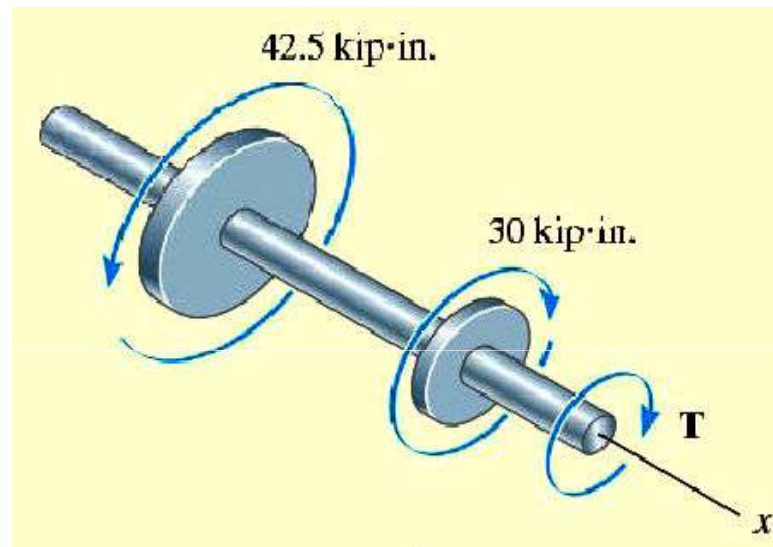
Örnek - 1

- Şekilde gösterilen şaft, iki ucundan mesnetlenmiştir. Şafta üç farklı noktadan burulma momenti etkimektedir. a-a kesitindeki A ve B noktalarında oluşan kesme gerilmelerini bulunuz.



Örnek – 1 (devam)

- **İç kuvvetleri** bularak işe başlamalıyız, serbest cisim diyagramı dikkate alınarak, a-a kesitindeki burulma momenti hesaplanır:



$$\Sigma M_x = 0; \quad 42.5 \text{ kip} \cdot \text{in.} - 30 \text{ kip} \cdot \text{in.} - T = 0 \quad T = 12.5 \text{ kip} \cdot \text{in.}$$

- **Kesit özelliği** olan polar atalet momenti bulunur:

$$J = \frac{\pi}{2} (0.75 \text{ in.})^4 = 0.497 \text{ in}^4$$

Örnek – 1 (devam)

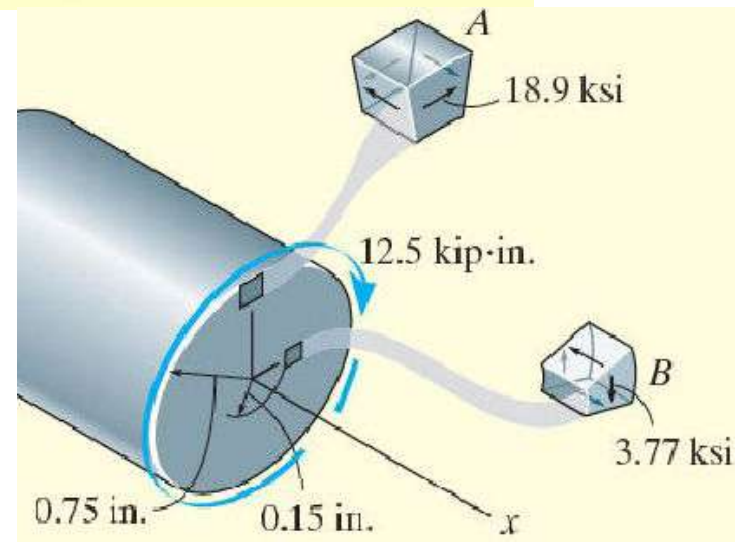
- **Kesme gerilmesi:** A noktası merkezden $\rho = 0.75$ in mesafede olduğuna göre,

$$\tau_A = \frac{T\rho}{J} = \frac{(12.5 \text{ kip} \cdot \text{in.})(0.75 \text{ in.})}{(0.497 \text{ in}^4)} = 18.9 \text{ ksi}$$

- Benzer şekilde B noktası merkezden $\rho = 0.15$ in mesafede olduğuna göre,

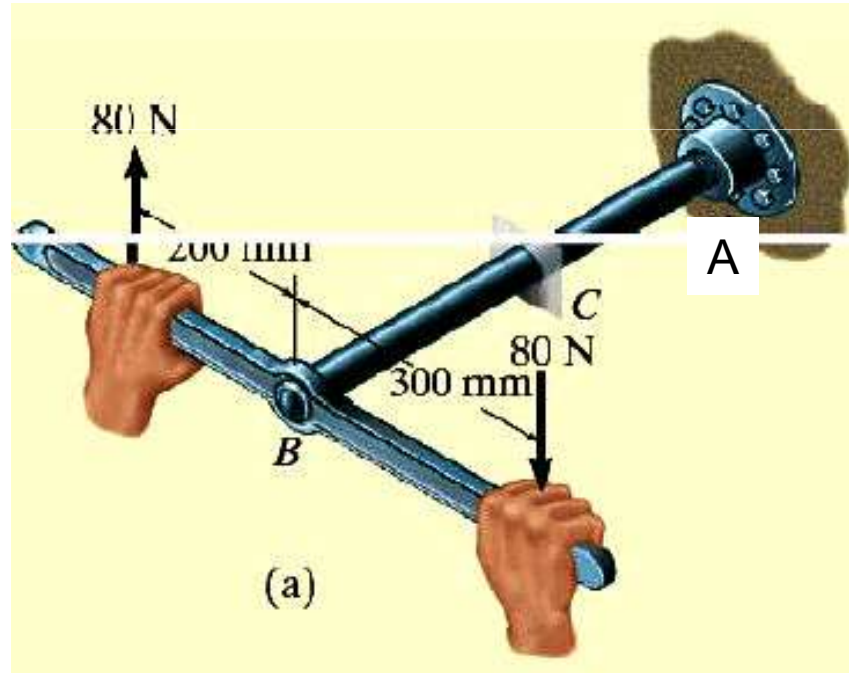
$$\tau_B = \frac{T\rho}{J} = \frac{(12.5 \text{ kip} \cdot \text{in.})(0.15 \text{ in.})}{(0.497 \text{ in}^4)} = 3.77 \text{ ksi}$$

- Gerilmelerin yönleri, kesitte oluşan bileşke burulma momentinin yönü dikkate alınarak belirlenir.



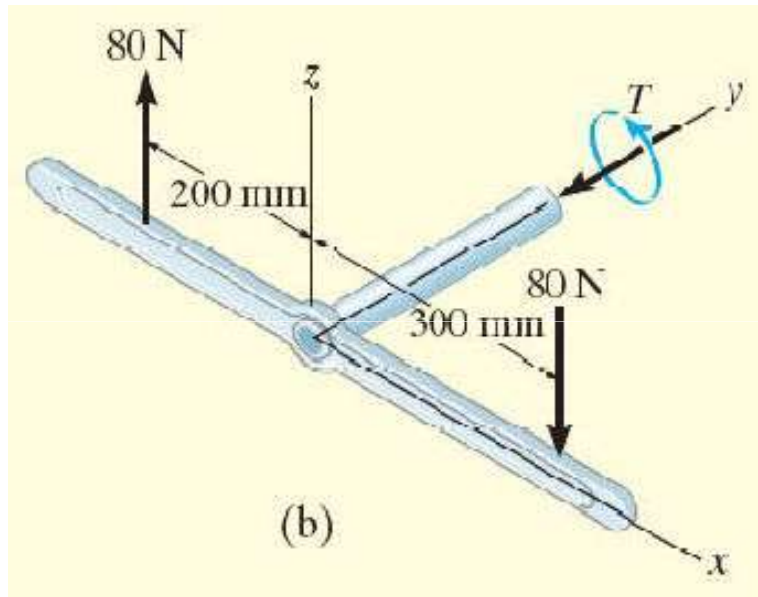
Örnek - 2

- Şekilde gösterilen borunun iç yarıçapı 80 mm, dış yarıçapı ise 100 mm'dir. Boru B ucuna etkiyen 80 N'luk kuvvet çifti ile sıkılıyorsa, borunun iç ve dış yüzlerinde meydana gelen kesme gerilmelerini bulunuz.



Örnek – 2 (devam)

- **İç kuvvetleri** bularak işe başlamalıyız, serbest cisim diyagramı dikkate alınarak, boru gövdesinde oluşan burulma momenti (reaksiyon kuvveti) bulunur:



$$\Sigma M_y = 0; \quad 80 \text{ N} (0.3 \text{ m}) + 80 \text{ N} (0.2 \text{ m}) - T = 0$$
$$T = 40 \text{ N} \cdot \text{m}$$

- **Kesit özelliği** olan polar atalet momenti içi boş tüp için aşağıdaki gibi bulunur:

$$J = \frac{\pi}{2} [(0.05 \text{ m})^4 - (0.04 \text{ m})^4] = 5.796(10^{-6}) \text{ m}^4$$

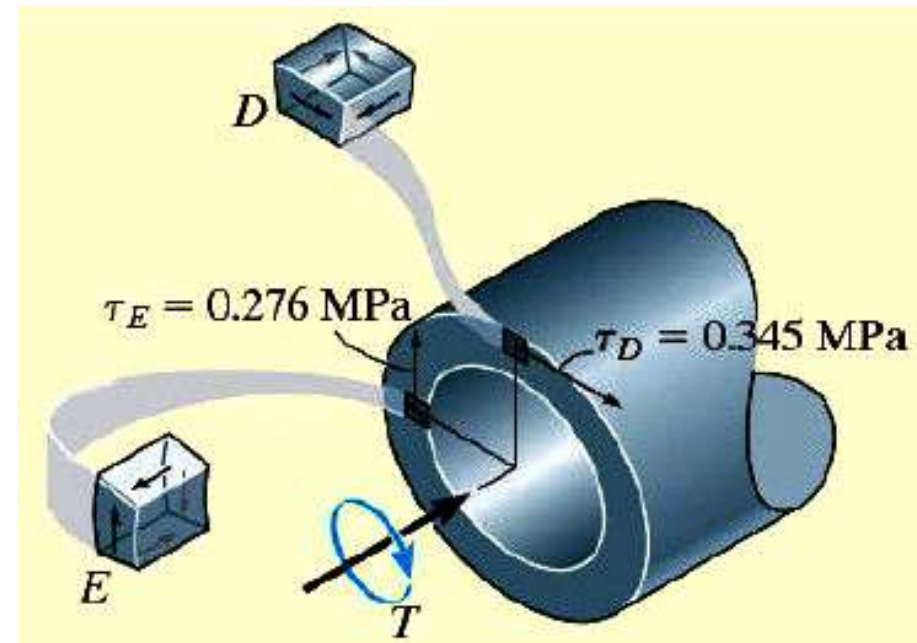
Örnek – 2 (devam)

➤ **Kesme gerilmesi:** Dış çeperin herhangi bir yerindeki kesme gerilmesi aşağıdaki gibi hesaplanır,

$$\tau_o = \frac{Tc_o}{J} = \frac{40 \text{ N} \cdot \text{m} (0.05 \text{ m})}{5.796(10^{-6}) \text{ m}^4} = 0.345 \text{ MPa}$$

Aynı şekilde, iç çeperdeki kesme gerilmesi hesaplanabilir:

$$\tau_i = \frac{Tc_i}{J} = \frac{40 \text{ N} \cdot \text{m} (0.04 \text{ m})}{5.796(10^{-6}) \text{ m}^4} = 0.276 \text{ MPa}$$



Burulma

Burulma Açısı

- Bazen şaftların dizaynında burulma açısı tasarımı sınırlayan durum olabilir, bu durumda burulma açısının hesabına ihtiyaç vardır.
- Ayrıca burulma açısının hesabı, statikçe belirsiz problemlerin çözülebilmesi için gerekmektedir.

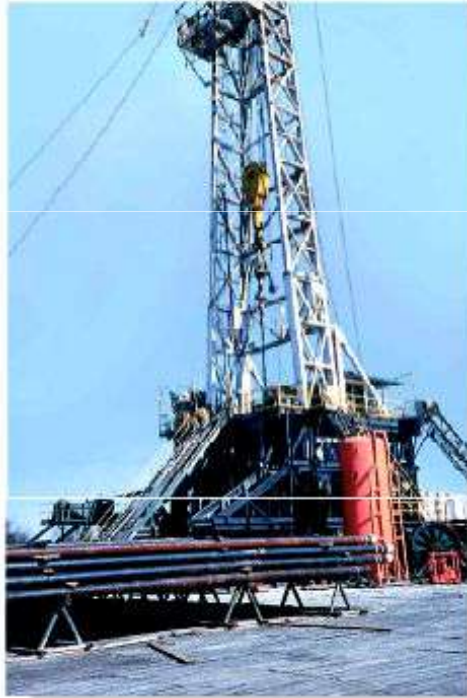


Figure: 05-04-UN

Oil wells are commonly drilled to depths exceeding a thousand meters. As a result, the total angle of twist of a string of drill pipe can be substantial and must be determined.

Burulma

Burulma Açısı

➤ Bu bölümde, şaftın bir ucunun diğer bir ucuna göre yaptığı burulma açısının hesabına ilişkin bir formülü çıkaracağız.

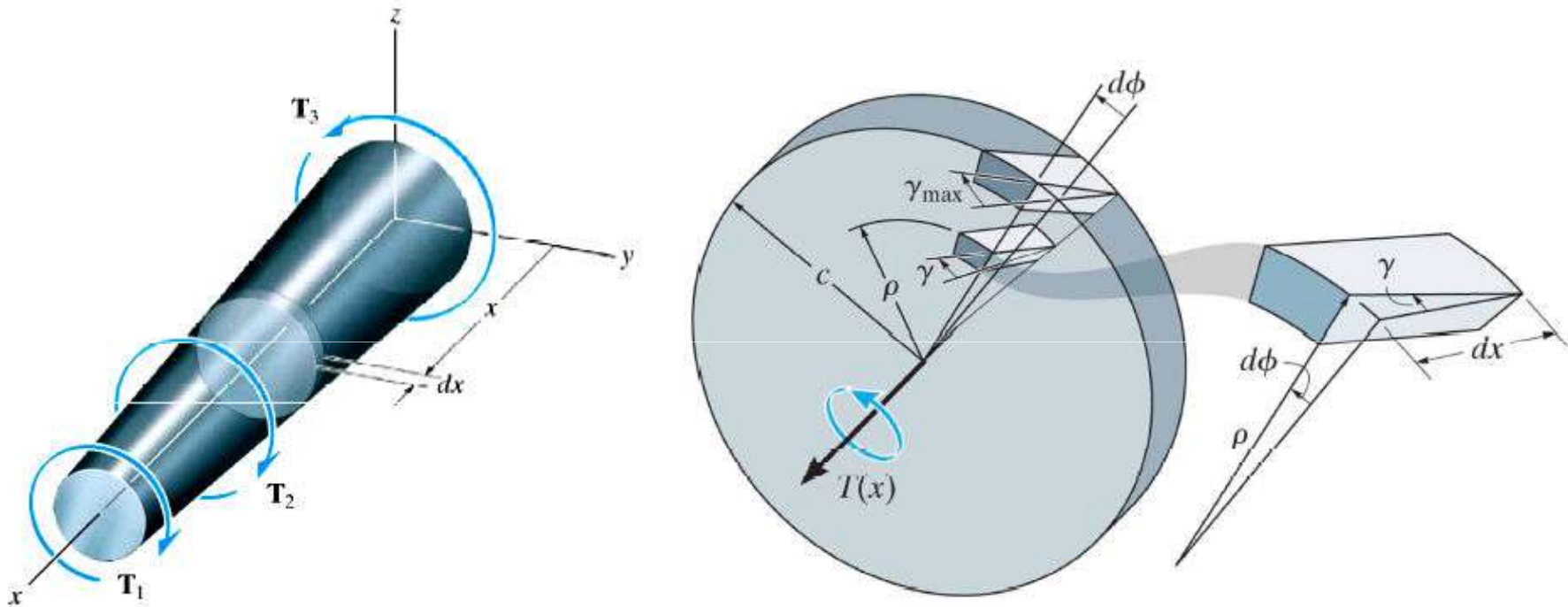
Şaftın en kesiti dairesel olduğu ve malzemenin lineer elastik davrandığı kabul edilecektir.

➤ Torkun (burulma momentinin) etkidiği noktalardaki lokal deformasyonlar ise Saint Venant prensibine uygun davrandığı kabul edilecektir. Oluşturdukları etki ise genellikle ihmal edilebilir düzeyde olacaktır.

Burulma

Burulma Açısı

- Kesit metodu kullanılarak, şafttan dx kalınlığında bir parça çıkarılacaktır:

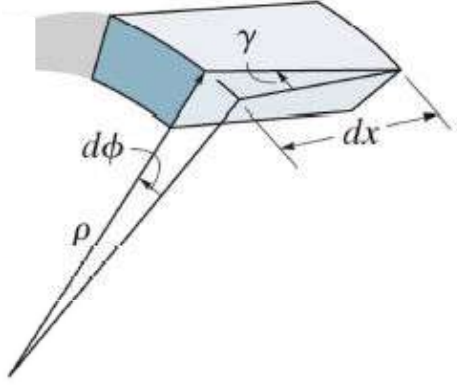


En kesitteki bileşke burulma momenti $T(x)$ 'dir. $T(x)$ 'den dolayı diskin bir yüzü diğer yüzüne göre $d\phi$ kadar burulacaktır (dönecektir). Bu sebeple, ρ gibi bir mesafedeki malzeme γ (gama) kesme şekil değişimine maruz kalacaktır.

Burulma

Burulma Açısı

➤ Şekle referansla aşağıdaki ifadeyi yazmak mümkündür:



$$d\phi = \gamma \frac{dx}{\rho}$$

➤ Hooke yasası geçerli olduğuna göre, $\gamma = \frac{\tau}{G}$ geçerlidir. Ayrıca, $\tau = \frac{T(x)}{J(x)} \rho$ olduğu bilinmektedir. Bu durumda, bu üç denklem kullanılarak, aşağıdaki ifadeyi yazmak mümkündür:

$$d\phi = \frac{T(x)}{J(x)G} dx \quad \phi = \int_0^L \frac{T(x)}{J(x)G} dx$$

Burulma

Burulma Açısı

➤ Sabit burulma momentinin ve en kesit alanının olması durumunda, yukarıdaki ifade daha basit soldaki forma dönüşür, şaftta birden fazla noktada burulma momenti etkiliyorsa, bu durumda burulma açısı sağdaki form kullanılarak hesaplanır:

$$\phi = \frac{TL}{JG} \qquad \phi = \sum \frac{TL}{JG}$$

Bu denklemle eksenel yüke maruz çubukların şekil değişimini veren formül arasındaki benzerliğe dikkat edin!

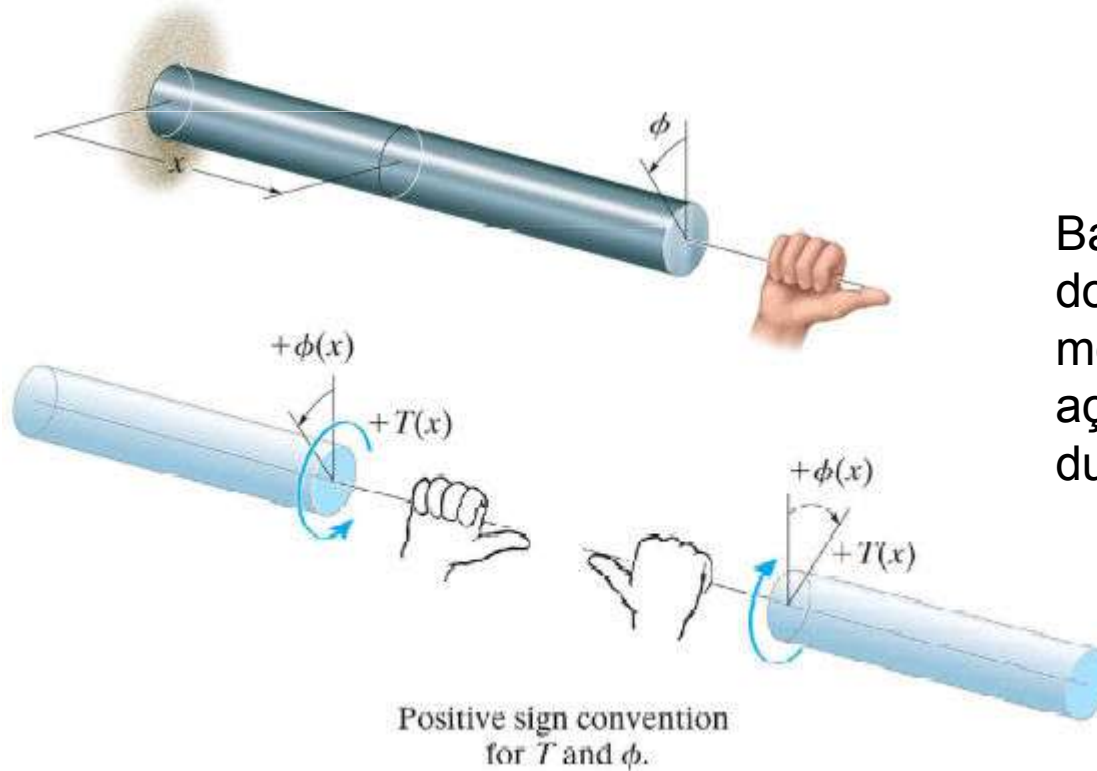
$$\delta = \frac{PL}{AE} \qquad \delta = \sum \frac{PL}{AE}$$

Burulma

Burulma Açısı

$$\phi = \sum \frac{TL}{JG}$$

➤ Yukarıdaki denklemi uygulamak için işaret kabulü yapmamız gerekmektedir. Bunun için “**sağ el**” kuralı kullanılacaktır. Aşağıdaki şekle referansla pozitif yönler tarif edilmiştir:

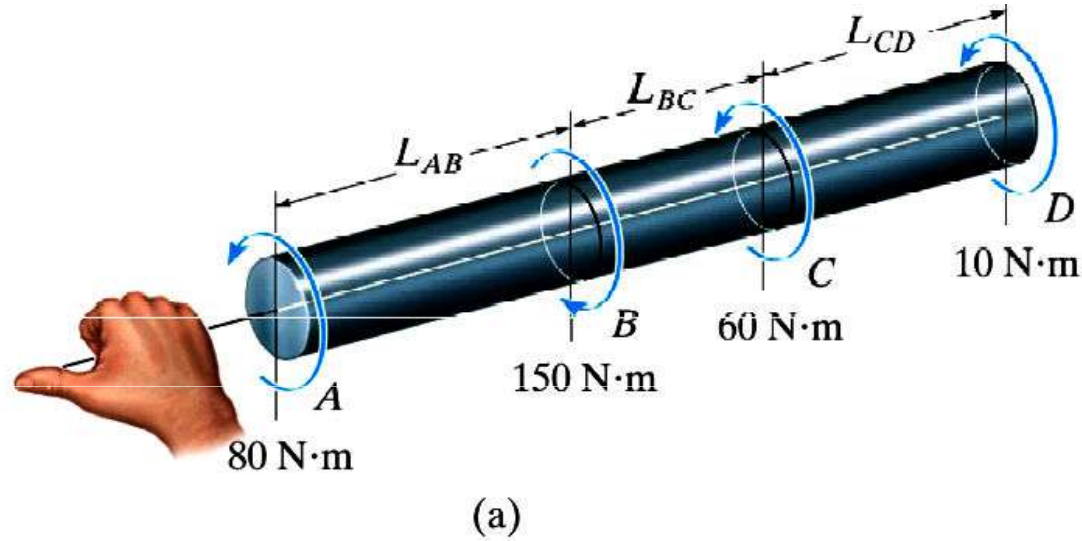


Baş parmak dışarı doğruya tork (burulma momenti) ve burulma açısı pozitifdir, tersi durumunda negatiftir.

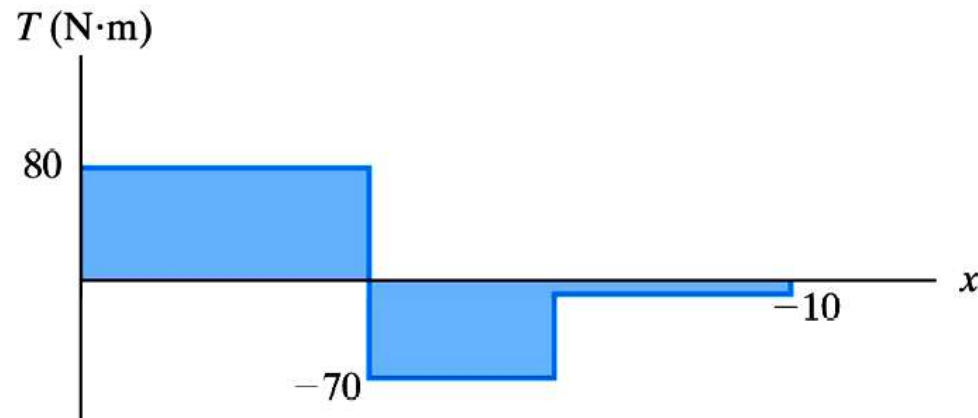
Burulma

Burulma Açısı

➤ Bu kuralın uygulanmasını göstermek için aşağıdaki örneği ele alalım:



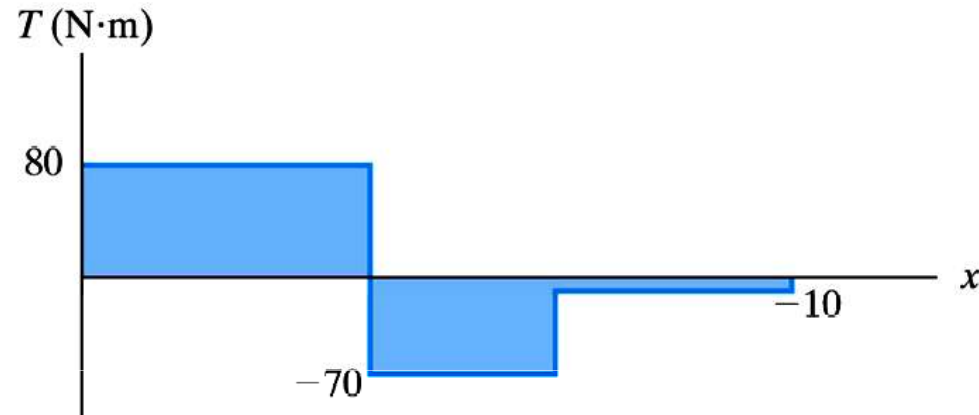
A ucunun D ucuna göre yaptığı burulma açısını bulmak için önce iç kuvvet diyagramı çizilir:



Burulma

Burulma Açısı

- İç kuvvet diyagramı dikkate alınarak, formül uygulanır:



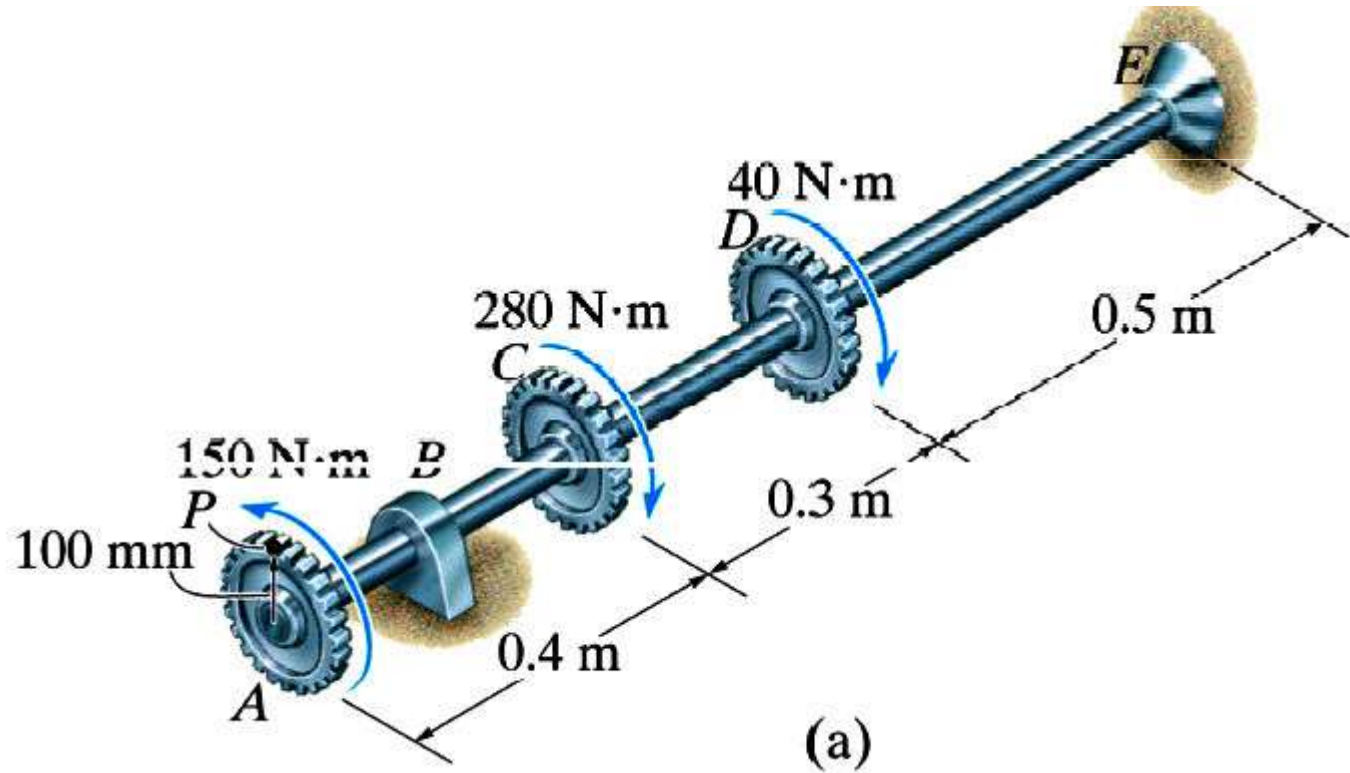
$$\phi_{A/D} = \frac{(80Nm)L_{AB}}{JG} + \frac{(-70Nm)L_{BC}}{JG} + \frac{(-10Nm)L_{CD}}{JG}$$

Sonuç pozitif çıkarsa, A ucu D ucuna göre şekilde gösterilen elin parmakları yönünde burulma gerçekleştirecektir demektir.

- Eğer bir noktanın burulma açısı, sabitlenmiş bir noktaya göre bulunuyorsa, bu durumda burulma açısı tek bir alt-indeksle gösterilir; örn. ϕ_A gibi.

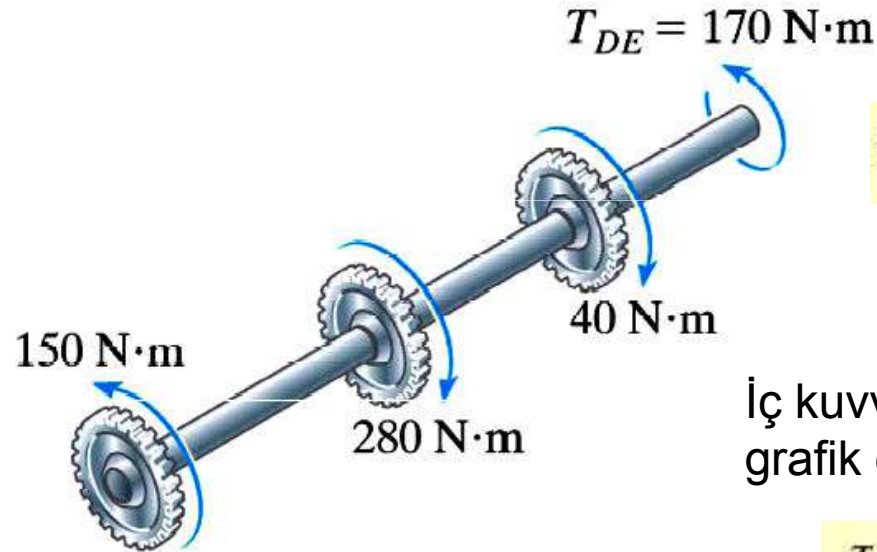
Örnek - 3

➤ Şekilde gösterilen vites sistemi üç farklı yerinden burulma momentleri etkisi altındadır. Şaftın yapıldığı malzemenin kesme modülü $G = 80 \text{ GPa}$ ve çapı ise 14 mm ise, A vitesi üzerindeki P noktasının ne kadar yer değiştirdiğini bulunuz. Şaft B kılavuzu içinde serbestçe dönebilmektedir.



Örnek – 3 (devam)

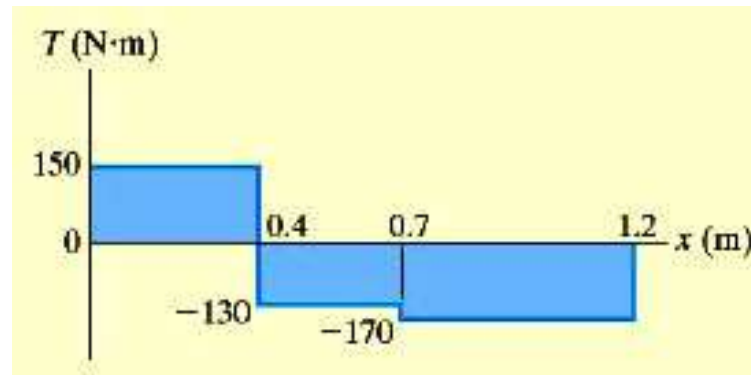
- **İç kuvvetleri** bulursak, AC, CD ve DE bölgelerinde farklı fakat sabit burulma momentleri olduğunu görürüz, E noktasındaki mesnette oluşan burulma momentinin de gösterildiği çizimi dikkate alırsak, bu bölgelerdeki iç kuvvetleri hesaplayabilir:



$$T_{AC} = +150 \text{ N} \cdot \text{m} \quad T_{CD} = -130 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$T_{DE} = -170 \text{ N} \cdot \text{m}$$

İç kuvvet diyagramı çizilirse aşağıdaki grafik elde edilir:



Örnek – 3 (devam)

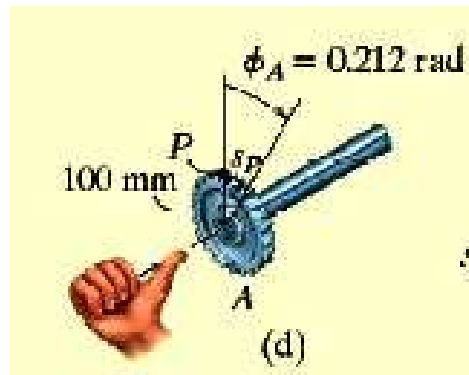
- **Burulma açısı:** şaftın en kesitinin polar atalet momenti aşağıdaki gibi bulunur:

$$J = \frac{\pi}{2} (0.007 \text{ m})^4 = 3.771(10^{-9}) \text{ m}^4$$

Burulma açısı denklemini üç farklı segmente uygulayarak P nin E'ye göre dönmesini bulabiliriz,

$$\begin{aligned} \phi_A = \sum \frac{TL}{JG} &= \frac{(+150 \text{ N} \cdot \text{m})(0.4 \text{ m})}{3.771(10^{-9}) \text{ m}^4 [80(10^9) \text{ N/m}^2]} \\ &+ \frac{(-130 \text{ N} \cdot \text{m})(0.3 \text{ m})}{3.771(10^{-9}) \text{ m}^4 [80(10^9) \text{ N/m}^2]} \\ &+ \frac{(-170 \text{ N} \cdot \text{m})(0.5 \text{ m})}{3.771(10^{-9}) \text{ m}^4 [80(10^9) \text{ N/m}^2]} = -0.2121 \text{ rad} \end{aligned}$$

Sonuç negatif çıktığına göre, P ucu aşağıdaki gibi döner:

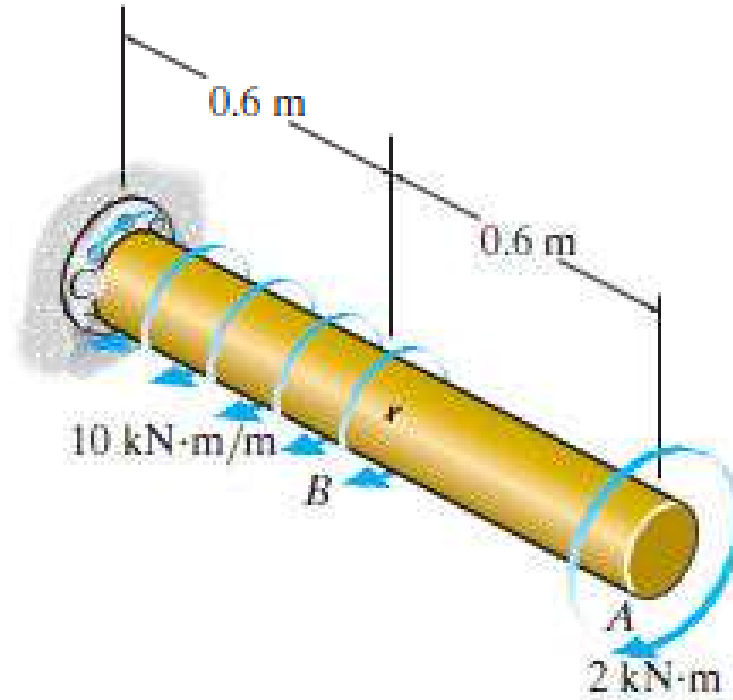


P noktasının yer değiştirmesi ise:

$$s_P = \phi_A r = (0.2121 \text{ rad})(100 \text{ mm}) = 21.2 \text{ mm}$$

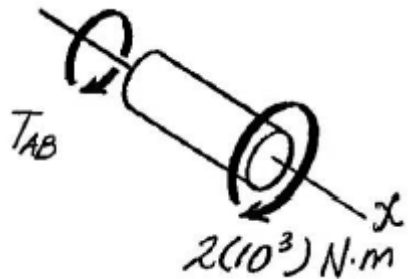
Örnek - 4

- $G = 26 \text{ GPa}$ kesme modülüne, C noktasından sabitlenmiş 80 mm çapa sahip shaft, şekilde gösterilen burulma yüklemesine maruzdur. A noktasının toplam burulma açısını bulunuz.



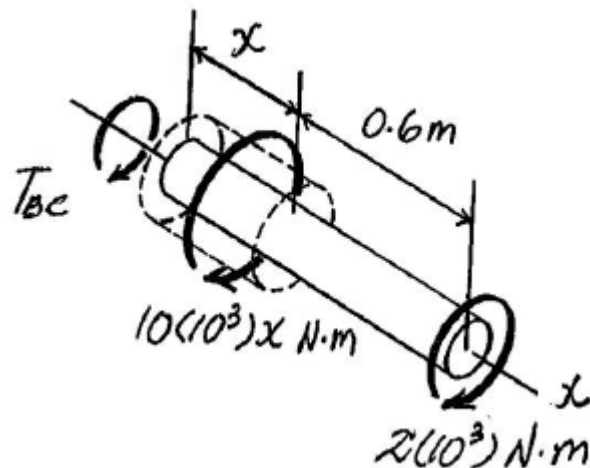
Örnek – 4 (devam)

- **İç kuvvetleri** serbest cisim diyagramlarını kullanarak



$$\Sigma M_x = 0; \quad -T_{AB} - 2(10^3) = 0$$

$$T_{AB} = -2(10^3) \text{ N} \cdot \text{m}$$



$$\Sigma M_x = 0; \quad -T_{BC} - 10(10^3)x - 2(10^3) = 0$$

$$T_{BC} = -[10(10^3)x + 2(10^3)] \text{ N} \cdot \text{m}$$

Örnek – 4 (devam)

➤ **Burulma açısı:** Şaftın polar atalet momenti,

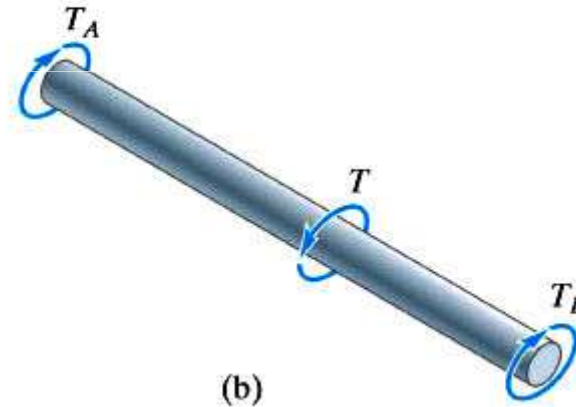
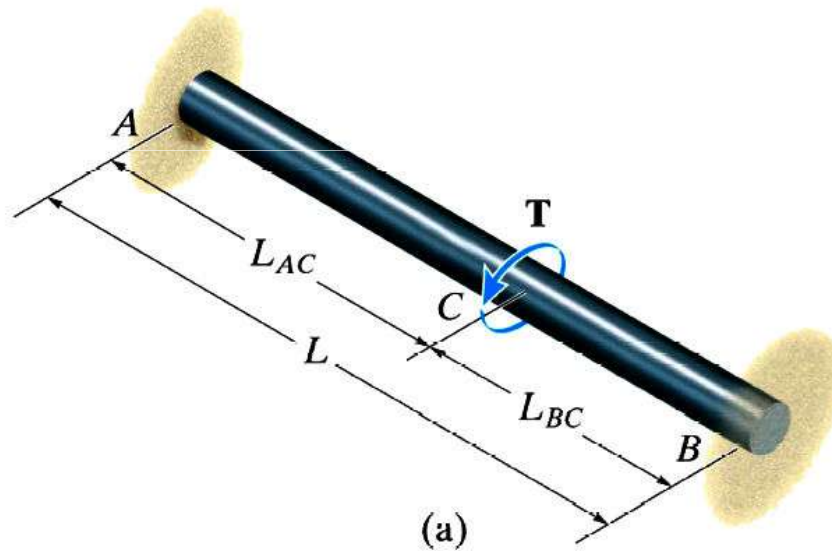
$$J = \frac{\pi}{2} (0.04)^4 = 1.28(10)^{-6} \pi$$

$$\begin{aligned}\phi_A &= \sum \frac{T_i L_i}{J_i G_i} = \frac{T_{AB} L_{AB}}{J G_{al}} + \int_0^{L_{BC}} \frac{T_{BC} dx}{J G_{al}} \\&= \frac{-2(10^3)(0.6)}{1.28(10^{-6})\pi(26)(10^9)} + \int_0^{0.6 \text{ m}} \frac{[10(10^3)x + 2(10^3)] dx}{1.28(10^{-6})\pi(26)(10^9)} \\&= -\frac{1}{1.28(10^{-6})\pi(26)(10^9)} \left\{ 1200 + [5(10^3)x^2 + 2(10^3)x] \right\}_0^{0.6 \text{ m}} \\&= -0.04017 \text{ rad} = 2.30^\circ\end{aligned}$$

Burulma

Statikçe Belirsiz Şaftlar

➤ Denge denklemlerinin çözümde yetersiz olduğu elemanlara, statikçe belirsiz elemanlar denir. Örneğin aşağıda verilen elemanın mesnet kuvvetlerinin bulunabilmesi için denge denklemleri yeterli değildir.



$$\sum M_x = 0; \quad T - T_A - T_B = 0 \quad (1)$$

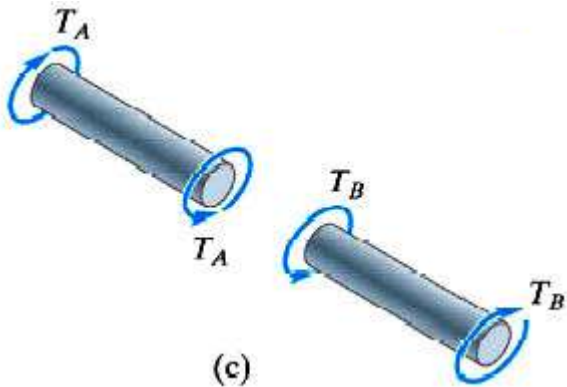
Burulma

Statikçe Belirsiz Şaftlar

➤ İki bilinmeyenin çözülmesi için ikinci bir denkleme daha ihtiyaç vardır. Bu denklem, uygunluk şartını dikkate alarak bulunabilir. Şaftın iki ucu da sabitlendiğine göre aşağıdaki ifade uygunluk denklemi olarak kullanılabilir:

$$\phi_{A/B} = 0$$

➤ Bu denklemi bilinmeyen kuvvetler cinsinden yazmamız gerekmektedir. Malzemenin lineer davrandığı kabulü altında, serbest cisim diyagramlarına referansla, aşağıdaki ifade yazılabilir:



$$\frac{T_A L_{AC}}{JG} - \frac{T_B L_{BC}}{JG} = 0 \quad (2)$$

JG burada sabit kabul edilmiştir.
Olmaya da bilirdi!

Burulma

Statikçe Belirsiz Şaftlar

➤(1) ve (2) nolu denklemler çözülürse, mesnet reaksiyonları bulunur:

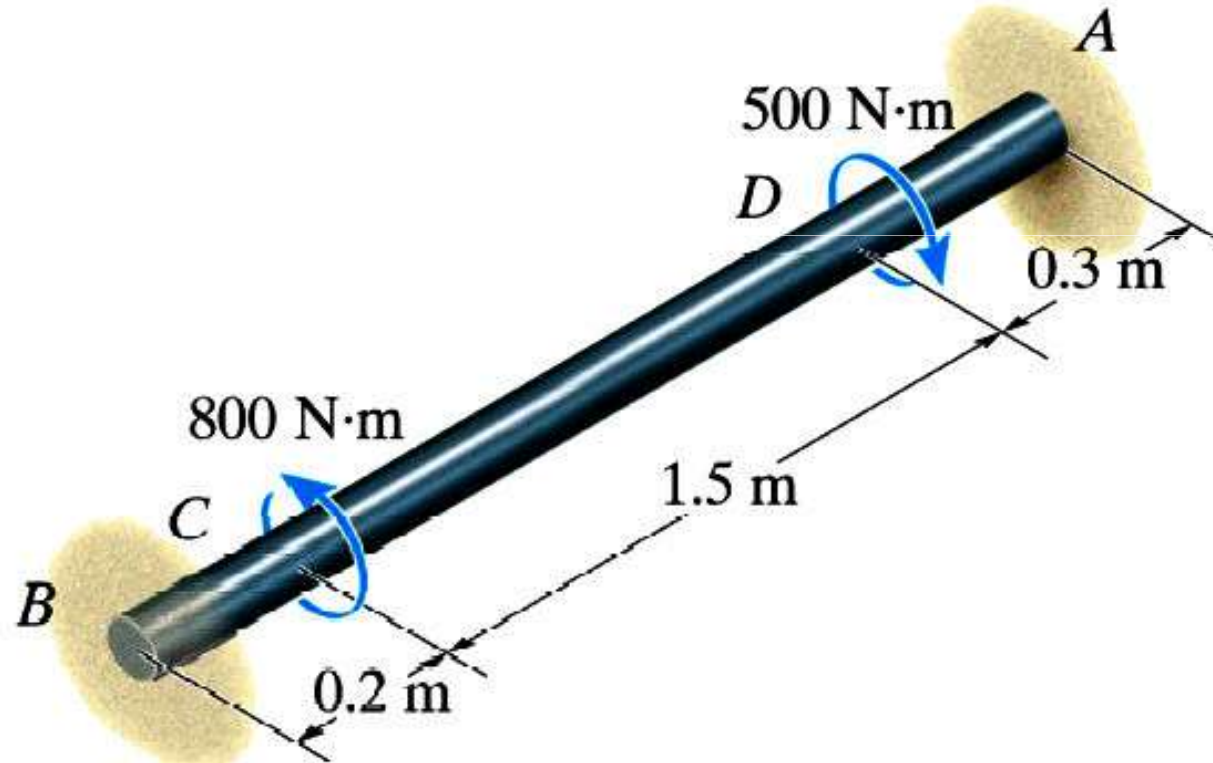
$$T_A = T \left(\frac{L_{BC}}{L} \right)$$

$$T_B = T \left(\frac{L_{AC}}{L} \right)$$

Bu denklemler bulunurken, $L = L_{AC} + L_{BC}$ ilişkisi de kullanıldı!

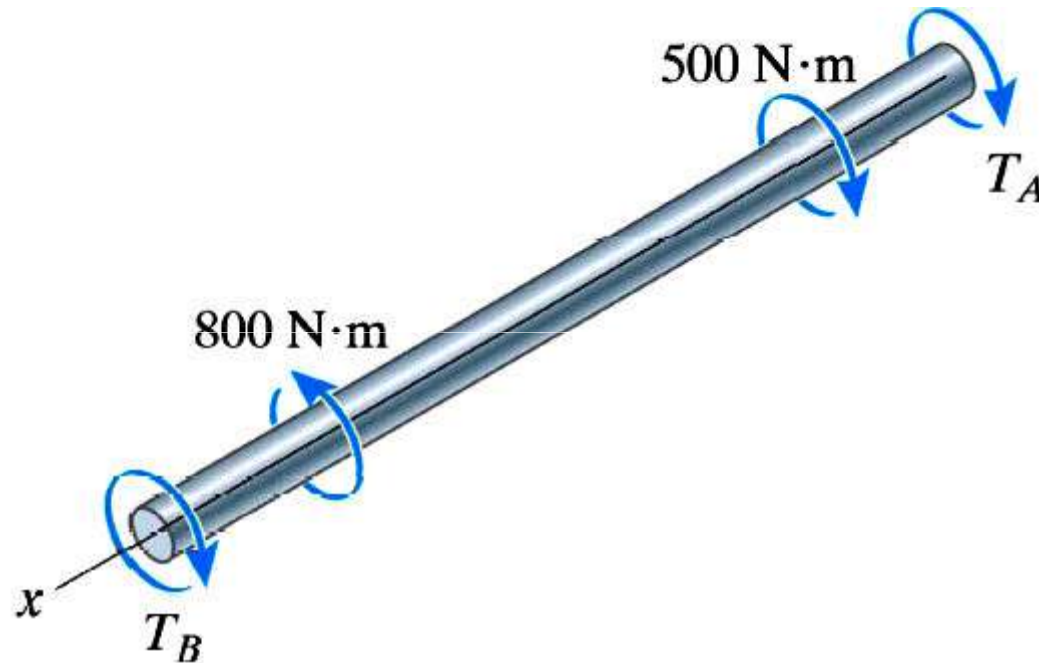
Örnek - 5

- İçi dolu çelik şaft A ve B noktalarından sabitlenmiştir. Şaftın çapı 20 mm ise, A ve B mesnetlerinde oluşan reaksiyon kuvvetlerini bulunuz.



Örnek – 5 (devam)

➤ **Dengeden** ilk denklem bulunur:



$$\Sigma M_x = 0; \quad -T_B + 800 \text{ N}\cdot\text{m} - 500 \text{ N}\cdot\text{m} - T_A = 0$$

Örnek – 5 (devam)

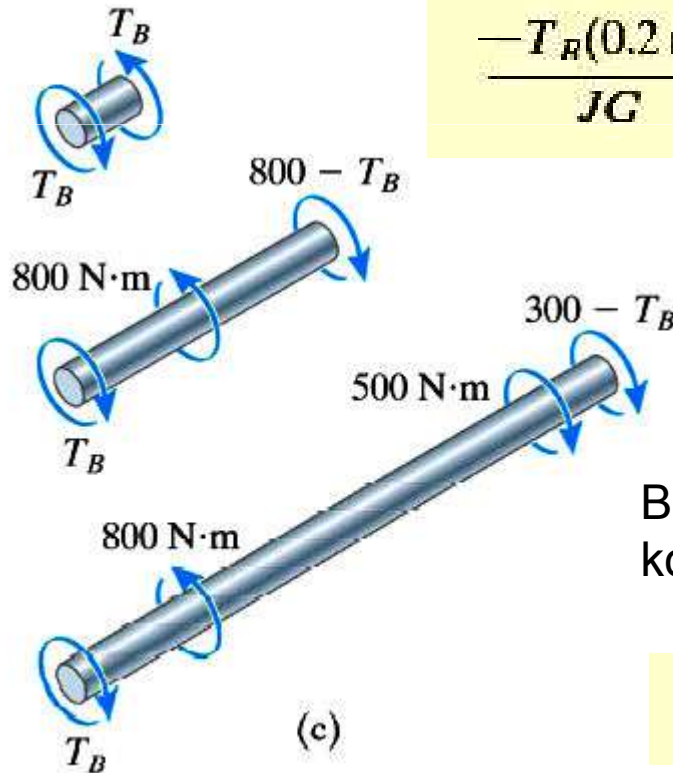
- **Uygunluk** şartı aşağıdaki durumu zorunlu kılar:

$$\phi_{A/B} = 0$$

- Bu ilişki, burulma açısı formülü kullanılarak yazılabilir:

$$\frac{-T_B(0.2 \text{ m})}{JG} + \frac{(800 - T_B)(1.5 \text{ m})}{JG} + \frac{(300 - T_B)(0.3 \text{ m})}{JG} = 0$$

$$T_B = 645 \text{ N} \cdot \text{m}$$



Bu denklem, denge denkleminde yerine konularak T_A bulunur:

$$T_A = -345 \text{ N} \cdot \text{m}$$

(kabul edilen yönün
tersi yönünde
etkimekte)